Théorème fondamental de l'arithmétique

134 Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

1] On suppose que n admet exactement 9 diviseurs positifs.
Montrer que n s'écrit : $n = a^8$ ou $n = a^2b^2$ où a et b sont deux nombres premiers positifs distincts.

2] On suppose que n admet exactement 9 diviseurs positifs et que $n = 39p + 1$ où p est premier.

a) Montrer que n ne peut pas s'écrire sous la forme a^8 avec a premier.

b) Montrer que : $p \in \{5 ; 37 ; 41\}$

c) Déterminer les entiers naturels n qui vérifient les conditions de la question 2].

Solution

On rappelle que si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}$ est la décomposition en produit de facteurs premiers (où $p_1 ; p_2 ; \dots ; p_N$ sont des nombres premiers deux à deux distincts, et $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \dots ; \alpha_N$ sont des entiers naturels non nuls), alors le nombre de diviseurs positifs de n est :

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_N)$$

1] n admet 9 diviseurs naturels.
9 s'écrit : $9 = (1+8)$ ou $9 = (1+2)(1+2)$

Donc : $n = a^8$, où a est premier
ou $n = a^2b^2$, où a et b sont deux nombres premiers distincts.

2] On suppose que n admet 9 diviseurs naturels et que $n = 39p + 1$ où p est premier.

a) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $n = a^8$ où a est un nombre premier.
Comme $n = 39p+1$, alors $a^8 = 39p + 1$ (p premier). Donc : $a^8 - 1 = 39p$
c'est-à-dire : $(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1) = 3 \times 13 \times p$
Comme a est premier, alors :
$a+1 > 1$, $a^2+1 > 1$ et $a^4+1 > 1$
Donc : $a - 1 = 1$, c'est-à-dire : $a = 2$
Et on a : $2^8 = 256 \equiv 22\ [39]$; ce qui contredit le fait que $a^8 = 39p+1$.
Donc, le nombre n ne peut pas s'écrire sous la forme a^8 où a est premier.

b) D'après ce qui précède, $n = a^2b^2$, où a et b sont deux nombres premiers distincts.
On a alors : $a^2b^2 = 39p + 1$
Donc : $(ab-1)(ab+1) = 3 \times 13 \times p$
Comme : $5 \leq ab - 1 < ab + 1$, alors :

$\begin{cases} ab-1 = 39 \\ ab+1 = p \end{cases}$ ou $\begin{cases} ab-1 = p \\ ab+1 = 39 \end{cases}$ ou $\begin{cases} ab-1 = 13 \\ ab+1 = 3p \end{cases}$

Donc :

$\begin{cases} p = 41 \\ ab = 40 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p = 37 \\ ab = 38 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p = 5 \\ ab = 14 \end{cases}$

Donc : $p = 5$ ou $p = 37$ ou $p = 41$.

c) • 1er cas : $p = 5$
On a : $n = 39 \times 5 + 1 = 196 = 2^2 \times 7^2$

• 2e cas : $p = 37$
On a : $n = 39 \times 37 + 1 = 1444 = 2^2 \times 19^2$

• 3e cas : $n = 41$
On a : $n = 39 \times 41 + 1 = 1600$ et $1600 = 2^6 \times 5^2$
1600 ne vérifie la condition imposée car il possède $(1+6)(1+2) = 21$ diviseurs.

• Conclusion
Les entiers naturels $n \geq 2$ qui ont 9 diviseurs et qui s'écrivent $n = 39p + 1$ où p est premier sont 196 et 1444.

135 Soit p un nombre premier positif.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1] a) On sait que : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$
Les multiples de p dans ce produit sont $p, 2p, \dots, n_1 p$. Montrer que : $n_1 = E\left(\frac{n}{p}\right)$

b) Montrer que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en produit de facteurs premiers est : $\sum_{\alpha \geq 1} E\left(\frac{n}{p^\alpha}\right)$ c'est-à-dire
$E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + \dots + E\left(\frac{n}{p^k}\right)$, où k est un entier naturel non nul que l'on déterminera.

2] a) Quel est le nombre de zéros par lesquels se termine 100!

b) Montrer que :
$(\forall (m ; n) \in (\mathbb{N}^*)^2) \quad \dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} \in \mathbb{N}$.

Solution

1] a) Le nombre de facteurs de $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ qui s'écrivent λp est n_1 tel que :
$n_1 p \leq n < (n_1+1)p$, c'est-à-dire $n_1 \leq \frac{n}{p} < n_1 + 1$
Donc : $n_1 = E\left(\frac{n}{p}\right)$.

b) • L'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers est le même que celui

de p dans le produit : $p\times(2p)\times\ldots\times(n_1 p)$

On a : $p(2p)\cdots(n_1 p) = p_1^{n_1}(1\times 2\times\ldots\times n_1) = p_1^{n_1}\times n_1!$

, Les facteurs comprenant p dans le produit $1\times 2\times\ldots\times n_1$ sont $p ; 2p ; \ldots , n_2 p$ où $n_2 = E\left(\frac{n_1}{p}\right)$

Et on a : $n_2 = E\left(\frac{1}{p}E\left(\frac{n}{p}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^2}\right)$ (à vérifier)

On a : $p(2p)\cdots(n_2 p) = p^{n_2}(1\times 2\times\ldots\times n_2) = p^{n_2}\times n_2!$

, Ainsi, on obtient une suite $(n_r)_{r\geqslant 1}$ d'entiers naturels, où $n_r = E\left(\frac{n}{p^r}\right)$

Donc, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n_{k+1} = 0$

k est l'entier tel que : $p^k \leqslant n < p^{k+1}$

, En conclusion : **L'exposant du nombre premier p dans la décomposition de $n!$ en produit de facteurs premiers est :**

$$\sum_{r=1}^{k} E\left(\frac{n}{p^r}\right) \text{, où } k \text{ vérifie } p^k \leqslant n < p^{k+1}!$$

Ce résultat porte le nom de "formule de LEGENDRE".

2] a/ . Déterminons l'exposant de 2 dans la décomposition de 100!

On a : $64 = 2^6 \leqslant 100 < 2^7 = 128$

D'après le résultat de la question 1] ($k=6$), on a :

$$\sum_{r=1}^{6} E\left(\frac{100}{2^r}\right).$$

On a : $E\left(\frac{100}{2}\right) = 50$; $E\left(\frac{100}{2^2}\right) = E(25) = 25$;

$E\left(\frac{100}{2^3}\right) = E\left(\frac{25}{2}\right) = 12$; $E\left(\frac{100}{2^4}\right) = E\left(\frac{25}{4}\right) = 6$;

$E\left(\frac{100}{2^5}\right) = E\left(\frac{25}{8}\right) = 3$; $E\left(\frac{100}{2^6}\right) = E\left(\frac{25}{16}\right) = 1$

et $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$

Donc, **l'exposant de 2 dans la décomposition de 100! est 97.**

. Déterminons l'exposant de 5 dans la décomposition de 100!

On a : $5^2 = 25 \leqslant 100 < 5^3 = 125$

Donc, l'exposant de 5 dans 100! est

$$\sum_{r=1}^{2} E\left(\frac{100}{5^r}\right) = E\left(\frac{100}{5}\right) + E\left(\frac{100}{5^2}\right) = 20 + 4 = 24$$

Donc, **l'exposant de 5 dans la décomposition de 100! est 24.**

. On en déduit que : **100! se termine par 24 zéros**

[On a : $2^{97}\times 5^{24} = 2^{73}\times 10^{24}$]

{L'ordinateur donne :

{ 100! = 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 ....000000000...0 (24 zéros)

b/. Pour prouver que $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ est un entier naturel, il suffit de montrer que pour $r\in\mathbb{N}$ et tout entier premier positif :

$$E\left(\frac{m}{p^r}\right) + E\left(\frac{n}{p^r}\right) + E\left(\frac{m+n}{p^r}\right) \leqslant E\left(\frac{2m}{p^r}\right) + E\left(\frac{2n}{p^r}\right)$$

Ce qui revient à prouver que

$$E(x) + E(y) + E(x+y) \leqslant E(2x) + E(2y)$$

(on a posé : $x = \frac{m}{p^r}$ et $y = \frac{n}{p^r}$)

. Soit $\alpha = E(x)$. On a : $\alpha \leqslant x < \alpha+1$ et $\alpha\in\mathbb{N}$

⊙ 1er cas : $\alpha \leqslant x < \alpha + \frac{1}{2}$

On a : $\alpha < \alpha + \frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} < \alpha + 1$; donc $E\left(x+\frac{1}{2}\right) = \alpha$

Donc : $E(x) + E\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2\alpha$

Par ailleurs : $2\alpha \leqslant 2x < 2\alpha + 1$; donc $E(2x) = 2\alpha$.

Par conséquent : $E(x) + E\left(x+\frac{1}{2}\right) = E(2x)$

⊙ 2e cas : $\alpha + \frac{1}{2} \leqslant x < \alpha + 1$

On a : $\alpha + 1 \leqslant x + \frac{1}{2} < \alpha + \frac{3}{2}$; donc $E\left(x+\frac{1}{2}\right) = \alpha + 1$.

Par ailleurs : $2\alpha + 1 \leqslant 2x < 2\alpha + 2$; donc $E(2x) = 2\alpha + 1$.

Comme $E(x) + E\left(x+\frac{1}{2}\right) = \alpha + (\alpha+1) = 2\alpha + 1$, alors :

$$E(x) + E\left(x+\frac{1}{2}\right) = E(2x)$$

⊙ Ainsi, on a prouvé que :

$$\mathbf{E(x) + E\left(x+\frac{1}{2}\right) = E(2x)}$$

. La relation $E(x) + E(y) + E(x+y) \leqslant E(2x) + E(2y)$ équivaut alors à :

$$E(x+y) \leqslant E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

On a : $E\left(x+\frac{1}{2}\right) \leqslant x + \frac{1}{2} < E\left(x+\frac{1}{2}\right) + 1$

$E\left(y+\frac{1}{2}\right) \leqslant y + \frac{1}{2} < E\left(y+\frac{1}{2}\right) + 1$

Donc :

$E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right) \leqslant x + y + 1 < E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right) + 2$

$E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right) - 1 \leqslant x + y < E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right) + 1$

Donc : $E(x+y) = E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right) - 1$

ou

$E(x+y) = E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right)$

Dans les deux cas, on a :

$$E(x+y) \leqslant E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

. En conclusion :

$$\left(\forall (m;n)\in(\mathbb{N}^*)^2\right) \quad \frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} \in \mathbb{N}$$

136 Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

On désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n, et par $\Pi(n)$ le produit des diviseurs positifs de n.

1] Montrer que : $\Pi(n) = n^{\frac{1}{2}d(n)}$

2] Déterminer n pour que : $\Pi(n) = (12)^{15}$

Solution

On suppose que la décomposition de n en produit de facteurs premiers est $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_N^{r_N}$ où $N \in \mathbb{N}^*$, $p_1, p_2, \dots, p_N$ sont des nombres premiers positifs deux à deux distincts, et où $r_1, r_2, \dots, r_N$ sont des entiers naturels non nuls.

On a : $d(n) = (1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_N)$

1] • Les diviseurs positifs de n sont les nombres $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$ où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ sont des entiers tels que :
$0 \leq \alpha_1 \leq r_1$, $0 \leq \alpha_2 \leq r_2$, $\dots$, $0 \leq \alpha_N \leq r_N$

• Le nombre de diviseurs de n qui s'écrivent $p_1 p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$ est $(1+r_2)\cdots(1+r_N)$

Le nombre de diviseurs de n qui s'écrivent $p_1^2 p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$ est $(1+r_2)\cdots(1+r_N)$

⋮

Le nombre de diviseurs de n qui s'écrivent $p_1^{r_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$ est $(1+r_2)\cdots(1+r_N)$

Donc l'exposant de p_1 dans la décomposition de $\Pi(n)$ en produit de facteurs premiers est : $(1+2+\dots+r_1) \times (1+r_2)\cdots(1+r_N)$

De même, l'exposant de p_2 dans la décomposition de $\Pi(n)$ en produit de facteurs premiers est : $(1+2+\dots+r_2) \times (1+r_1)(1+r_3)\cdots(1+r_N)$

Par ailleurs, l'exposant de p_N dans la décomposition de $\Pi(n)$ en produit de facteurs premiers est

$$(1+2+\dots+r_N) \times (1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{N-1})$$

Donc, pour $k \in \{1; 2; \dots; N\}$, l'exposant de p_k dans la décomposition de $\Pi(n)$ en produit de facteurs premiers est :

$$(1+2+\dots+r_k)\frac{d(n)}{1+r_k}$$

Donc : $\Pi(n) = \prod_{k=1}^{N} p_k^{(1+2+\dots+r_k)\frac{d(n)}{1+r_k}}$

Comme $1+2+\dots+r_k = \frac{r_k(1+r_k)}{2}$, alors

$$(1+2+\dots+r_k)\frac{d(n)}{1+r_k} = \frac{1}{2} r_k d(n)$$

Donc $\Pi(n) = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\frac{1}{2} r_k d(n)} = \left(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_N^{r_N}\right)^{\frac{1}{2}d(n)}$

D'où : $\Pi(n) = n^{\frac{1}{2}d(n)}$

2]. On a : $(12)^{15} = 2^{30} \times 3^{15}$

Donc : $\Pi(n) = (12)^{15}$ implique qu'il existe $(r; s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $n = 2^r \times 3^s$.

Soit $(r; s) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On a : $d(2^r \times 3^s) = (1+r)(1+s)$

et $\Pi(2^r \times 3^s) = (2^r \times 3^s)^{\frac{1}{2}(1+r)(1+s)}$

Donc :

$$\Pi(2^r \times 3^s) = (12)^{15} \Leftrightarrow (2^r \times 3^s)^{(1+r)(1+s)} = (2^{30} \times 3^{15})^2$$

$$\Pi(2^r \times 3^s) = (12)^{15} \Leftrightarrow 2^{r(1+r)(1+s)} \times 3^{s(1+s)(1+r)} = 2^{60} \times 3^{30}$$

Donc :

$$\Pi(2^r \times 3^s) = (12)^{15} \Leftrightarrow \begin{cases} r(1+r)(1+s) = 60 \\ (1+r)s(1+s) = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2s \\ s(1+s)(1+2s) = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (r = 4 \text{ et } s = 2)$$

Donc : $\Pi(n) = (12)^{15} \Leftrightarrow n = 2^4 \times 3^2 = 144$

137 A. Pour tout x de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on désigne par $\sigma(x)$ la somme des diviseurs positifs de x.

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs.

1] Montrer que pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$, on a :
$$\sigma(p^r) = \frac{p^{r+1}-1}{p-1}.$$

2] Soit $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_N^{r_N}$ la décomposition de x en produit de facteurs premiers.
Montrer que : $\sigma(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{p_k^{r_k+1}-1}{p_k-1}$

3] Montrer que pour $(x; y) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$:
$$x \wedge y = 1 \Rightarrow \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$$

B. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sigma(n) = 2n$ et n pair.

1] Montrer qu'il existe $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $n = 2^a \times b$ et b impair.

2] Montrer qu'il existe un entier naturel c tel que : $b = (2^{a+1}-1)c$ et $\sigma(b) = 2^{a+1}c$.

3] Montrer que : $c = 1$

4] En déduire que $2^{a+1}-1$ est premier puis qu'il existe $p \in \mathbb{P}$ tel que : $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

Solution

A. 1] Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$.
Les diviseurs positifs de p^r sont : $1, p, p^2, \dots,$ et p^r.
Comme $p \geq 2$, alors $p \neq 1$.

On a : $\sigma(p^r) = 1 + p + p^2 + \dots + p^r$

Donc : $\sigma(p^r) = \dfrac{p^{r+1} - 1}{p - 1}$

2] On a :

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{p_k^{r_k+1} - 1}{p_k - 1} = \prod_{k=1}^{N} (1 + p_k + \dots + p_k^{r_k})$$

$$= (1 + p_1 + \dots + p_1^{r_1}) \dots (1 + p_N + \dots + p_N^{r_N})$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq d_k \leq r_k \\ 1 \leq k \leq N}} p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_N^{d_N}$$

Donc : $\displaystyle\prod_{k=1}^{N} \frac{p_k^{r_k+1} - 1}{p_k - 1} = \sum_{d \in \mathcal{D}_x} d$

où $\mathcal{D}_x$ est l'ensemble des diviseurs positifs de x

D'où :
$$\sigma(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{p_k^{r_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

3] Soit $(x; y) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$.
On suppose que : $x \wedge y = 1$
Soit $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_N^{r_N}$ et $y = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_M^{s_M}$ les décompositions de x et y en produit de facteurs premiers, où $p_1, p_2, \dots, p_N$ et $q_1, q_2, \dots, q_M$ sont des nombres premiers deux à deux distincts.
Alors $xy = (p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_N^{r_N})(q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_M^{s_M})$ est la décomposition de xy en produit de facteurs premiers.
D'après le résultat de 2], on a :

$$\sigma(xy) = \left(\frac{p_1^{r_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \dots \times \frac{p_N^{r_N+1} - 1}{p_N - 1}\right)\left(\frac{q_1^{s_1+1} - 1}{q_1 - 1} \times \dots \times \frac{q_M^{s_M+1} - 1}{q_M - 1}\right)$$

Donc : $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.
Ainsi : Pour $x \wedge y = 1$, on a :
$$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$$

B. Dans cette partie $n \in \mathbb{N}^*$, n est pair et $\sigma(n) = 2n$
1]. Soit a l'exposant de 2 dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers :
a est le plus grand entier naturel tel que 2^a divise n.
Il existe un entier impair b tel que $n = 2^a b$.

• Ainsi, il existe un entier naturel non nul a et un entier impair b tel que $n = 2^a b$

2] Comme $\sigma(n) = 2n$, alors : $\sigma(2^a b) = 2^{a+1} b$
Comme b est impair, alors : $2 \wedge b = 1$
et par suite : $2^a \wedge b = 1$.
D'après le résultat de A. 3], on a :
$$\sigma(2^a b) = \sigma(2^a)\sigma(b)$$
Par ailleurs, d'après A. 1], on a :
$$\sigma(2^a) = 2^{a+1} - 1.$$
Donc : $\sigma(2^a b) = (2^{a+1} - 1)\sigma(b)$
Donc : $(2^{a+1} - 1)\sigma(b) = 2^{a+1} b$
On en déduit que : $2^{a+1} - 1$ divise $2^{a+1} b$
Comme $(2^{a+1} - 1) \wedge 2^{a+1} = 1$, alors d'après le théorème de Gauss :
$$2^{a+1} - 1 \text{ divise } b$$
Il existe donc c de $\mathbb{N}^*$ tel que : $b = (2^{a+1} - 1)c$
Donc : $\sigma(b) = 2^{a+1} c$.
Par conséquent :
$$(\exists c \in \mathbb{N}^*) \; ; \; b = (2^{a+1} - 1)c \text{ et } \sigma(b) = 2^{a+1} c.$$

3] <u>Montrons que $c = 1$</u>
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $c \geq 2$.
On a : $b = (2^{a+1} - 1)c$ et $\sigma(b) = 2^{a+1} c$
Donc : $\sigma(b) \geq 1 + c + (2^{a+1} - 1)c$
On aura : $2^{a+1} c \geq 2^{a+1} c + 1$; ce qui est impossible.
D'où : $c = 1$.

4]. On a montré que :
$n = 2^a b$, $b = 2^{a+1} - 1$ et $\sigma(b) = 2^{a+1}$
Comme $\sigma(2^{a+1} - 1) = 2^{a+1} = (2^{a+1} - 1) + 1$,
alors les deux diviseurs positifs uniques sont $2^{a+1} - 1$ et 1.
Donc : $(2^{a+1} - 1) \in \mathbb{P}$.

• On en déduit que :
$$(\exists a \in \mathbb{N}^*) \; ; \; \begin{cases} n = 2^a(2^{a+1} - 1) \\ (2^{a+1} - 1) \in \mathbb{P}. \end{cases}$$
Donc :
Si n est un entier naturel non nul pair tel que $\sigma(n) = 2n$, alors :
il existe un nombre premier positif p $(p = a + 1)$ tel que :
$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$
Reste à établir que si $2^\alpha - 1$ est premier, alors α est nécessairement premier.
(À cet égard, voir l'exercice 115)

Systèmes de numération

(138) Calculer :

$A = \overline{110110}_{(2)} + \overline{11011}_{(2)}$;

$B = \overline{11101}_{(2)} - \overline{10011}_{(2)}$;

$C = \overline{11001}_{(2)} \times \overline{1011}_{(2)}$

Solution

$$\begin{array}{r} \overline{110110}_{(2)} \\ +\ \overline{11011}_{(2)} \\ \hline A = \overline{1010001}_{(2)} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} \overline{11101}_{(2)} \\ -\ \overline{10011}_{(2)} \\ \hline B = \overline{1010}_{(2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{11001}_{(2)} \\ \times\ \overline{1011}_{(2)} \\ \hline 11001 \\ 11001\cdot \\ 11001\cdot\cdot \\ \hline C = \overline{100010011}_{(2)} \end{array}$$

(139) Déterminer les entiers naturels x, y et z sachant que :

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)}$$

Solution

Comme x, y et z sont des chiffres du système de numération de base sept, alors x, y et z sont compris entre 0 et 6, avec $x \neq 0$ et $z \neq 0$.

On a : $\overline{xyz}_{(7)} = 7^2x + 7y + z = 49x + 7y + z$

$\overline{zyx}_{(11)} = 11^2z + 11y + x = 121z + 11y + x$

Donc : $\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)} \Leftrightarrow x + 11y + 121z = 49x + 7y + z$

$\Leftrightarrow 120z + 4y - 48x = 0$

$\Leftrightarrow 30z + y - 12x = 0$

$\Leftrightarrow y = 6(2x - 5z)$

Donc : $\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 6 \\ 6(2x - 5z) = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x = 5z \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 6 \\ 2x - 5z = 1 \end{cases}$

Et on a : $2x = 5z \Leftrightarrow (x = 5 \text{ et } z = 2)$

et $2x - 5z = 1 \Leftrightarrow 2(x-3) = 5(z-1)$

$\Leftrightarrow (x - 3 = 0 \text{ et } z - 1 = 0)$

$\Leftrightarrow (x = 3 \text{ et } z = 1)$

D'où :

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 1 \end{cases} \right)$$

(140) Déterminer la valeur de l'entier naturel x tel que :

$$\overline{30407}_{(x)} = \overline{12551}_{(10)}$$

Solution

Comme 7 est un chiffre du système de numération de base x, alors : $x > 7$. On a :

$\overline{30407}_{(x)} = 12551 \Leftrightarrow 3x^4 + 4x^2 + 7 = 12551$

$\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^2 = 12544$

$\Leftrightarrow (x^2 - 64)(3x^2 + 196) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 64$

D'où :

$$\overline{30407}_{(x)} = \overline{12551}_{(10)} \Leftrightarrow x = 8$$

(141) Soit $x \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\overline{36}_{(x)} + \overline{45}_{(x)} = \overline{103}_{(x)}$$

Calculer $\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)}$

Solution

- On a nécessairement $x > 6$

La relation $\overline{36}_{(x)} + \overline{45}_{(x)} = \overline{103}_{(x)}$ équivaut à

$$(3x + 6) + (4x + 5) = x^2 + 3$$

c'est-à-dire à : $x^2 - 7x = 8$

ou encore à : $x(x - 7) = 8$

En utilisant les diviseurs de 8, on obtient :

$$\overline{36}_{(x)} + \overline{45}_{(x)} = \overline{103}_{(x)} \Leftrightarrow x = 8$$

- On a :

$\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = (3x + 6)(4x + 5) = 12x^2 + 39x + 30$

Puisque $x = 8$, alors

$\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = (8 + 4)x^2 + (4 \times 8 + 7)x + 3 \times 8 + 6$

$= (x + 4)x^2 + (4x + 7)x + 3x + 6$

$= x^3 + 8x^2 + (8 + 2)x + 6$

$= x^3 + x^3 + (x + 2)x + 6$

$\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$

Donc : $\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = \overline{2126}_{(x)}$

(142) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 3$

Montrer que les nombres entiers $\overline{10201}_{(a)}$ et $\overline{10101}_{(a)}$ ne sont pas premiers

Solution

- On a : $\overline{10201}_{(a)} = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 = \left(\overline{101}_{(a)}\right)^2$ et $a^2 + 1 > 5$. Donc : $\overline{10201}_{(a)}$ n'est pas premier.

- On a : $\overline{10101}_{(a)} = a^4+a^2+1 = (a^2+1)^2-a^2$

$$\overline{10101}_{(a)} = (a^2-a+1)(a^2+a+1)$$

Et on a : $3 < a^2-a+1 < a^2+a+1$

Donc : $\overline{10101}_{(a)}$ n'est pas premier

143 Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a > 5$.
Déterminer a sachant que :

$$\overline{13054}_{(a)} = \overline{114}_{(a)} \times \overline{111}_{(a)}$$

Solution

La relation $\overline{13054}_{(a)} = \overline{114}_{(a)} \times \overline{111}_{(a)}$ équivaut successivement à :

$$a^4+3a^3+5a+4 = (a^2+a+4)(a^2+a+1)$$

$$a^4+3a^3+5a+4 = a^4+2a^3+6a^2+5a+4$$

$$a^3-6a^2=0$$

$$a^2(a-6)=0$$

Comme $a>5$, alors : $a=6$.

144 Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$(E) : \overline{(y-3)(x-2)}_{(x)} = \overline{(x-2)(y-3)}_{(y)}$$

Solution

- L'équation (E) est définie lorsque

$0 < y-3 < x$ et $0 < x-2 < y$

c'est-à-dire lorsque :

$3 < y < x+3$ et $2 < x < y+2$

- (E) équivaut à :

$$(y-3)x + (x-2) = (x-2)y + (y-3)$$

c'est-à-dire à :

$$y = 2x-1$$

Comme $3 < y < x+3$, alors $3 < 2x-1 < x+3$.

Donc : $2 < x < 4$.

Il s'ensuit aussitôt que : $x=3$ et par suite : $y=5$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{(3 ; 5)\}$

Remarque : Il est facile de vérifier que : $\overline{21}_{(3)} = \overline{12}_{(5)} = 7$

145 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 6$. On pose

$a_n = \overline{2310}_{(n)}$ et $b_n = \overline{252}_{(n)}$

Déterminer, selon les valeurs de n, le p.g.d.c. $\delta_n = a_n \wedge b_n$.

Solution

- On a : $a_n = 2n^3+3n^2+n = n(n+1)(2n+1)$

$b_n = 2n^2+5n+2 = (n+2)(2n+1)$

- On a : $\delta_n = n(n+1)(2n+1) \wedge (n+2)(2n+1)$

$\delta_n = (2n+1)\left[n(n+1) \wedge (n+2)\right]$

- On a : $n(n+1) = (n+2)(n-1)+2$

On en déduit que :

$$n(n+1) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 2$$

D'autre part : $(n+2)\wedge 2 = n \wedge 2$.

Donc : $n(n+1) \wedge (n+2) = n \wedge 2$

Ainsi, on a : $\delta_n = (2n+1)(n \wedge 2)$

On a : $\begin{cases} n \equiv 0\,[2] \Leftrightarrow n \wedge 2 = 2 \\ n \equiv 1\,[2] \Leftrightarrow n \wedge 2 = 1 \end{cases}$

- Conclusion :

Si n est pair, $\delta_n = 2(2n+1)$

Si n est impair, $\delta_n = 2n+1$

145 1] On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$(E) : (x+1)^2 = 9+5y$

a) Montrer que si $(x;y)$ est solution de (E), alors : $x \equiv 2\,[5]$ ou $x \equiv 1\,[5]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

2] Montrer que :

$(\forall k \in \mathbb{Z})\ (5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$

3] Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système

$$\begin{cases} \overline{121}_{(x)} = \overline{59}_{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$$

BAC

Solution

1] a) Noter que : $(x+1)^2 \equiv 9\,[5] \Leftrightarrow \left(x \equiv 2\,[5] \text{ ou } x \equiv 1\,[5]\right)$

b) Soit S l'ensemble des solutions de (E)

- Si $(x = 5k+1 ; k \in \mathbb{Z})$, alors :

$9+5y = 25k^2+20k+4$ et $y = 5k^2+4k-1$.

- Si $(x = 5k+2 ; k \in \mathbb{Z})$, alors :

$9+5y = 25k^2+30k+9$ et $y = 5k^2+6k$.

On démontre que :

$$S = \{(5k+1 ; 5k^2+4k-1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(5k+2 ; 5k^2+6k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2] Noter que : $5k^2+4k-1 = k(5k+1) + (3k-1)$

et que : $5k+1 = (3k-1)\times 1 + (2k+2)$

puis que : $3k-1 = (2k+2)\times 1 + (k-3)$

et que : $2k+2 = 2(k-3)+8$

3] On trouve que l'ensemble des solutions est

$$T = \{(40\lambda+16 ; 320\lambda^2+272\lambda+56) \mid \lambda \in \mathbb{N}\}$$

Exercices du BAC

146 1] On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$(E) : 195x - 232y = 1.$$

a) Déterminer $195 \wedge 232$.

b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

c) Déterminer l'entier naturel unique d qui vérifie :

$$0 \leq d \leq 232 \text{ et } 195d \equiv 1 [232]$$

2] Montrer que 233 est premier.

3] Soit A l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 232.
Soit f l'application de A dans A défini par : Pour tout a de A, f(a) est le reste de la division euclidienne de a^{195} par 233.

a) Montrer que :

$$(\forall a \in A \setminus \{0\}) \quad a^{232} \equiv 1 [233]$$

b) Montrer que pour tout a et b de A : Si $f(a) = f(b)$, alors : $a = b$.

c) Soit a et b deux éléments de A tels que : $f(a) = b$. Déterminer a en fonction de b.

d) Montrer que f est bijectiv puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Solution

1] a) Utilisons l'algorithme d'Euclide.
Posons : $\alpha = 232$ et $\beta = 195$

- On a : $232 = 1 \times 195 + 37$
Donc : $232 \wedge 195 = 195 \wedge 37$
et $37 = \alpha - \beta$
- On a : $195 = 5 \times 37 + 10$
Donc : $195 \wedge 37 = 37 \wedge 10$
et $10 = \beta - 5(\alpha - \beta) = -5\alpha + 6\beta$.
- On a : $37 = 3 \times 10 + 7$
Donc : $37 \wedge 10 = 10 \wedge 7$
et $7 = (\alpha - \beta) - 3(-5\alpha + 6\beta) = 16\alpha - 19\beta$
- On a : $10 = 1 \times 7 + 3$
Donc : $10 \wedge 7 = 7 \wedge 3$
et $3 = (-5\alpha + 6\beta) - (16\alpha - 19\beta) = -21\alpha + 25\beta$
- On a : $7 = 2 \times 3 + 1$. Donc : $7 \wedge 3 = 3 \wedge 1 = 1$
et $1 = 16\alpha - 19\beta - 2(-21\alpha + 25\beta)$
$1 = 58\alpha - 69\beta$.

On a montré que : $\alpha \wedge \beta = 1$ et $58\alpha - 69\beta = 1$.
Donc : $232 \wedge 195 = 1$

Remarques :

- On peut utiliser le théorème fondamental de l'arithmétique :
On a : $195 = 3 \times 5 \times 13$ et $232 = 2^3 \times 29$
D'où : $195 \wedge 232 = 1$.
- Le raisonnement par l'algorithme d'Euclide permet de trouver une solution particulière de l'équation (E)
Comme : $58 \times 232 - 69 \times 195 = 1$, alors le couple $(-69, -58)$ est une solution de (E).

b) On a : $195 \times 163 - 232 \times 137 = 31785 - 31784 = 1$
Donc $(163 ; 137)$ est une solution particulière de l'équation (E).
Soit S l'ensemble des solutions de (E).
Soit $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$. On a :

$$195x - 232y = 1 \Leftrightarrow 195(x - 163) = 232(y - 137)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 232 \mid 195(x - 163) \\ 232(y - 137) = 195(x - 163) \end{cases}$$

Comme : $232 \wedge 195 = 1$, d'après le théorème de Gauss :

$$195x - 232y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 232 \mid x - 163 \\ 232(y - 137) = 195(x - 163) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 163 = 232k ; k \in \mathbb{Z} \\ 232(y - 137) = 195 \times 232k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 163 = 232k \\ y - 137 = 195k \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c) Soit d un entier tel que :
$0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1 [232]$.
Il existe e tel que : $195d - 232e = 1$.
Donc, d'après 1] b), il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que

$$d = 163 + 232\lambda$$

Comme $d \in [0 ; 232]$, alors $-\frac{163}{232} \leq \lambda \leq \frac{69}{232}$
et puisque $\lambda \in \mathbb{Z}$, alors $\lambda = 0$.
Donc : $d = 163$. On vérifie que 163 satisfait aux conditions imposées :
$163 \times 195 = 1 + 232 \times 137 \equiv 1 [232]$ et $0 \leq 163 \leq 232$.
En conclusion :
Le seul entier tel que $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1 [232]$ est $d = 163$.

2] Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à 233 sont :

$2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13$

Et 233 n'est divisible par aucun d'entre eux puisque :

$233 \equiv 1 [2]$, $233 \equiv 2 [3]$, $233 \equiv 3 [5]$

$233 \equiv 2 [7]$, $233 \equiv 2 [11]$ et $233 \equiv 12 [13]$.

Donc : **233 est un nombre premier.**

3] a) Soit $a \in A \setminus \{0\}$

Comme 233 est premier, alors $a \wedge 233 = 1$.

D'après le théorème de Fermat :

$a^{232} \equiv 1 [233]$ **pour $a \in A \setminus \{0\}$.**

b) • On a : $f(0) = 0$.

Pour $a \in A$, si $f(a) = 0$, alors $a = 0$

• Soit a et b deux éléments de $A \setminus \{0\}$ tels que : $f(a) = f(b)$

Comme : $f(a) \equiv a^{195} [233]$ et $f(b) \equiv b^{195} [233]$,

alors : $a^{195} \equiv b^{195} [233]$

Donc : $(a^{195})^{163} \equiv (b^{195})^{163} [233]$

c'est-à-dire : $a^{195 \times 163} \equiv b^{195 \times 163} [233]$

Comme : $195 \times 163 - 232 \times 137 = 1$, alors

$a^{1+232 \times 137} \equiv b^{1+232 \times 137} [233]$

Comme $a^{1+232 \times 137} = (a^{232})^{137} \times a$

et $a^{232} \equiv 1 [233]$,

alors $a^{1+232 \times 137} \equiv a [233]$

De même $b^{1+232 \times 137} \equiv b [233]$

On en déduit : $a \equiv b [233]$

Donc : 233 divise $a - b$, et puisque $-231 \leq a - b \leq 231$, alors $a - b = 0$ et par suite $a = b$.

• En conclusion :

$(\forall (a ; b) \in A^2)$ $\quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

c) • 1er cas : $\underline{b = 0}$

Si $b = f(a)$ c'est-à-dire $f(a) = 0$ ou encore $f(a) = f(0)$, alors $a = 0$.

• 2e cas : $\underline{b \neq 0}$ et $0 < b \leq 232$

Soit $a \in A$ tel que $f(a) = b$ $(a \neq 0)$

On a alors : $a^{195} \equiv b [233]$

Donc : $(a^{195})^{163} \equiv b^{163} [233]$

$a^{195 \times 163} \equiv b^{163} [233]$

Donc : $a^{1+232 \times 137} \equiv b^{163} [233]$

$a \times (a^{232})^{137} \equiv b^{163} [233]$

Comme : $a^{232} \equiv 1 [233]$ (car $a \neq 0$), alors

$(a^{232})^{137} \equiv 1 [233]$ et $a \times (a^{232})^{137} \equiv a [233]$.

Donc : $a \equiv b^{163} [233]$

D'où : **Si a et b sont des éléments de A tels que $f(a) = b$, alors a est le reste de la division euclidienne de b^{163} par 233.**

d) • $f : A \to A$ est injective d'après 3] b).

- f est surjective d'après 3] c) et l'antécédent d'un élément b de A est le reste de la division de b^{163} par 233

• $\underline{\text{Conclusion}}$:

$f : A \to A$ est bijective, et sa bijection réciproque $f^{-1} : A \to A$ est telle que pour tout a de A, $f^{-1}(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{163} par 233

(147) I. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

(E) : $35u - 96v = 1$.

1] Vérifier que le couple $(11 ; 4)$ est une solution particulière de l'équation (E)

2] En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

II. On considère, dans $\mathbb{N}$, l'équation :

(F) : $x^{35} \equiv 2 [97]$.

1] Soit x une solution de l'équation (F).

a) Montrer que 97 est premier.
Montrer que x et 97 sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x^{96} \equiv 1 [97]$

c) Montrer que : $x \equiv 2^{11} [97]$

2] Montrer que si x est un entier naturel qui vérifie $x \equiv 2^{11} [97]$, alors x est une solution de l'équation (F).

3] Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent $11 + 97k$, où $k \in \mathbb{N}$.

Solution

1] On a : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 385 - 384 = 1$

Donc, **(11 ; 4) est une solution de l'équation (E).**

2] Désignons par S l'ensemble des solutions de (E)

- Soit $(u;v) \in S$. On a : $35u - 96v = 1$
c'est-à-dire : $35(u-11) = 96(v-4)$

Donc : $\begin{cases} 96 \text{ divise } 35(u-11) \\ 96(v-4) = 35(u-11) \end{cases}$

Comme $96 \wedge 35 = 1$ (car $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$), alors d'après le théorème de Gauss

96 divise $u - 11$ et $96(v-4) = 35(u-11)$

Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$u - 11 = 96k$ et $96(v-4) = 35 \times 96k$

$u - 11 = 96k$ et $v - 4 = 35k$

Donc : $(\exists k \in \mathbb{Z})$; $u = 11 + 96k$ et $v = 4 + 35k$.

- On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(11+96k; 4+35k)$ est une solution de l'équation (E). En effet :

$35(11+96k) - 96(4+35k) = 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$.

- En conclusion : **L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :**

$$S = \{(11+96k; 4+35k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

II. 1] Soit x une solution de l'équation (F).

On a : $x^{35} \equiv 2 [97]$ (et $x \in \mathbb{N}$)

a) • Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à 97 sont $2; 3; 5; 7$. Et 97 n'est divisible par aucun d'entre eux car :

$97 \equiv 1 [2]$, $97 \equiv 1 [3]$, $97 \equiv 2 [5]$ et $97 \equiv 6 [7]$

Donc : **97 est un nombre premier.**

• 97 est premier et $x^{35} \equiv 2 [97]$.

Donc : $x^{37} \wedge 97 = 1$.

Donc : $x \wedge 97 = 1$

Noter que : $x^{35} \wedge 97 \neq 1 \Leftrightarrow x^{35} \wedge 97 = 97$
$\Leftrightarrow 97 \mid x^{35}$
$\Leftrightarrow 97 \mid x$
$\Leftrightarrow x \wedge 97 = 97$
$x^{35} \wedge 97 \neq 1 \Leftrightarrow x \wedge 97 \neq 1$

b) 97 est premier et $x \wedge 97 = 1$.
D'après le théorème de Fermat :

$$x^{96} \equiv 1 [97]$$

c) On a : $(x^{96})^4 \equiv 1 [97]$
c'est-à-dire : $x^{96 \times 4} \equiv 1 [97]$
ou encore : $x^{96 \times 4 + 1} \equiv x [97]$
Comme : $96 \times 4 + 1 = 35 \times 11$, alors
$x^{35 \times 11} \equiv x [97]$
Donc : $(x^{35})^{11} \equiv x [97]$

Or $x^{35} \equiv 2 [97]$, alors $(x^{35})^{11} \equiv 2^{11} [97]$.
Donc : $x \equiv 2^{11} [97]$.
Ainsi : **(x solution de (F)) $\Rightarrow$ $x \equiv 2^{11} [97]$**

2] Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que : $x \equiv 2^{11} [97]$

On a : $x^{35} \equiv (2^{11})^{35} [97]$

$x^{35} \equiv 2^{35 \times 11} [97]$

Et on a : $2^{35 \times 11} = 2^{96 \times 4 + 1} = (2^{96})^4 \times 2$

Comme $2 \wedge 97 = 1$ et 97 est premier, alors d'après le théorème de Fermat : $2^{96} \equiv 1 [97]$

Donc : $(2^{96})^4 \equiv 1 [97]$ et $(2^{96})^4 \times 2 \equiv 2 [97]$.

Donc : $x^{35} \equiv 2 [97]$

Ainsi : **$x \equiv 2^{11} [97] \Rightarrow x^{35} \equiv 2 [97]$**

$x \equiv 2^{11} [97] \Rightarrow$ (x solution de (F))

3] D'après les résultats de 1] et 2] de la partie II, on a : **$x^{35} \equiv 2 [97] \Leftrightarrow x \equiv 2^{11} [97]$**

Par ailleurs : $2^{11} = 2048 = 21 \times 97 + 11$.

Donc : $2^{11} \equiv 11 [97]$.

Donc : **$x^{35} \equiv 2 [97] \Leftrightarrow x \equiv 11 [97]$**

L'ensemble des solutions de l'équation (F) est $T = \{11 + 97k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(148) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

1] a) Vérifier que a_n est un nombre pair pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquels $a_n \equiv 0 [3]$

2] Soit p un nombre premier tel que $p > 3$.

a) Montrer que :

$2^{p-1} \equiv 1 [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1 [p]$

b) Montrer que : p divise a_{p-2}

c) Montrer quel que soit l'entier naturel premier q, il existe un entier naturel non nul n tel que :

$a_n \wedge q = q$.

Solution

1] a) On a : $2^n \equiv 0 [2]$ (car $n \in \mathbb{N}^*$) et $6^n \equiv 0 [2]$ et $3^n \equiv 1 [2]$ (car $3 \equiv 1 [2]$). Donc : $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 [2]$.

D'où : **$a_n \equiv 0 [2]$** c'est-à-dire : **a_n est pair.**

b) On a : $3^n \equiv 0 [3]$ et $6^n \equiv 0 [3]$ (car $n \in \mathbb{N}^*$)

Donc : **$a_n \equiv 2^n - 1 [3]$**

Comme : $2 \equiv -1\,[3]$, alors : $a_n \equiv (-1)^n - 1\,[3]$.

On a : $a_n \equiv 0\,[3] \Leftrightarrow (-1)^n \equiv 1\,[3]$

$a_n \equiv 0\,[3] \Leftrightarrow$ (n pair)

Et on a : $\{n \in \mathbb{N}^* / a_n \equiv 0\,[3]\} = \{2k / k \in \mathbb{N}^*\}$.

2] a) Comme p est premier et $p > 3$, alors $p \wedge 2 = 1$ et $p \wedge 3 = 1$.

D'après le théorème de Fermat :

$2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Donc : $2^{p-1} \times 3^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

c'est-à-dire : $(2 \times 3)^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

D'où : $6^{p-1} \equiv 1\,[p]$

b) On a : $6a_{p-2} = 6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1)$

$= 3 \times 2 \times 2^{p-2} + 2 \times 3 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$

$= 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$

$6a_{p-2} = 3(2^{p-1} - 1) + 2(3^{p-1} - 1) - (6^{p-1} - 1)$

Comme : $2^{p-1} - 1 \equiv 0\,[p]$ et $3^{p-1} - 1 \equiv 0\,[p]$ et $6^{p-1} - 1 \equiv 0\,[p]$, alors $6a_{p-2} \equiv 0\,[p]$

c'est-à-dire : p divise $6a_{p-2}$.

Comme $p \wedge 2 = 1$ et $p \wedge 3 = 1$, alors $p \wedge 6 = 1$.

D'après le théorème de Gauss : p divise a_{p-2}

c) Soit q un nombre premier positif.

- 1er cas : $q > 3$.

D'après 2] b), q divise a_{q-2} c'est-à-dire $a_{q-2} \wedge q = q$. Dans ce cas, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \wedge q = q$ (il suffit de prendre $n = q - 2$)

- 2ème cas : $q = 2$.

On sait que pour tout entier n, a_n est un nombre pair et $a_n \wedge 2 = 2$

Donc, tous les nombres n de $\mathbb{N}^*$ répondent à la question.

- 3ème cas : $q = 3$.

D'après 1] b), on a : $a_{2k} \equiv 0\,[3]$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et $a_{2k} \wedge 3 = 3$

Donc, tous les nombres entiers naturels n pairs répondent à la question

- Conclusion :

Pour tout nombre premier positif q, il existe un entier naturel non nul n tel que : $a_n \wedge q = q$

Remarque :

On peut noter que : $a_n = (1 + 2^n)(1 + 3^n) - 2$

149 1] Déterminer les entiers naturels n tels que : $n^2 + 1 \equiv 0\,[5]$.

2] Soit p un nombre premier tel que :

$p = 3 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Soit n un entier naturel tel que :

$n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

a) Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$

b) Montrer que : $n \wedge p = 1$.

c) En déduire que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$.

d) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n qui vérifie : $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

Solution

1] Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$n^2 + 1 \equiv 0\,[5] \Leftrightarrow n^2 \equiv 4\,[5] \Leftrightarrow 5 \mid (n+2)(n-2)$

Comme 5 est premier, alors :

$n^2 + 1 \equiv 0\,[5] \Leftrightarrow (5 \mid n+2$ ou $5 \mid n-2)$

$\Leftrightarrow (n \equiv -2\,[5]$ ou $n \equiv 2\,[5])$

$\Leftrightarrow (n \equiv 3\,[5]$ ou $n \equiv 2\,[5])$

Donc l'ensemble des entiers naturels n tels que $n^2 + 1 \equiv 0\,[5]$ est :

$S = \{3 + 5\lambda \mid \lambda \in \mathbb{N}\} \cup \{2 + 5\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$

Remarque

On peut aussi dresser la liste des carrés modulo 5

n modulo 5	0	1	2	3	4
n^2 modulo 5	0	1	4	4	1

D'où : $n^2 \equiv -1\,[5] \Leftrightarrow (n \equiv 2\,[5]$ ou $n \equiv 3\,[5])$

2] a) On a : $n^2 \equiv -1\,[p]$.

Donc : $(n^2)^{1+2k} \equiv (-1)^{1+2k}\,[p]$

Comme $(-1)^{1+2k} = [(-1)^2]^k \times (-1) = -1$, alors :

$(n^2)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$

b) On a : $n^2 \equiv -1\,[p]$. Comme p est premier, alors $n^2 \wedge p = 1$ et par suite : $n \wedge p = 1$.

c) D'après le théorème de Fermat :

$n^{p-1} \equiv 1\,[p]$

c'est-à-dire : $n^{2+4k} \equiv 1\,[p]$.

Donc : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$

d) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

D'après 2] a), on a : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1\ [p]$
et d'après 2] c), on a : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\ [p]$.
Alors, on aura : $1 \equiv -1\ [p]$ c'est-à-dire p divise 2 ; ce qui contredit le fait que p est premier et $p \geq 3$.
En définitive, si p est un nombre premier s'écrivant sous la forme $p = 3 + 4k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors l'équation $n^2 + 1 \equiv 0\ [p]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.

150 Soit N le nombre entier naturel représenté dans le système décimal par :

$$N = \underbrace{111\ldots11}_{2010 \text{ fois } 1}$$

1] Montrer que : N est divisible par 11.
2] a/ Vérifier que 2011 est premier et que : $10^{2010} - 1 = 9N$.
b/ Montrer que 2011 divise $9N$.
c/ En déduire que 2011 divise N
3] Montrer que N est divisible par le nombre 22121

Solution

1] On a : $N = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{2009} = \sum_{k=0}^{2009} 10^k$
Comme $10 \equiv -1\ [11]$ et $10^2 \equiv 1\ [11]$,
et $N = (1 + 10^2 + \cdots + 10^{2008}) + (10 + 10^3 + \cdots + 10^{2009})$,
alors : $N \equiv (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1005 \text{ termes}}) - (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1005 \text{ termes}})\ [11]$
Donc : $N \equiv 0\ [11]$
N est divisible par 11.

2] a/ • Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à 2011 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 et 43. Et 2011 n'est divisible par aucun d'eux puisque :
$2011 \equiv 1\ [2]$, $2011 \equiv 1\ [3]$, $2011 \equiv 1\ [5]$
$2011 \equiv 2\ [7]$, $2011 \equiv 9\ [11]$, $2011 \equiv 9\ [13]$
$2011 \equiv 5\ [17]$, $2011 \equiv 16\ [19]$,
$2011 \equiv 10\ [23]$, $2011 \equiv 10\ [29]$, $2011 \equiv 27\ [31]$
$2011 \equiv 13\ [37]$, $2011 \equiv 2\ [41]$ et $2011 \equiv 33\ [43]$.
Donc : 2011 est premier.

• On a : $10^{2010} - 1 = (10^{2009} + 10^{2008} + \cdots + 10 + 1)(10 - 1)$
c'est-à-dire : $10^{2010} - 1 = 9N$.

b/ 2011 est premier et $10 \wedge 2011 = 1$.
D'après le théorème de Fermat : $10^{2010} \equiv 1\ [2011]$
c'est-à-dire : 2011 divise $10^{2010} - 1$
ou encore : 2011 divise $9N$

c/ 2011 est premier et $9 < 2011$.
Donc $2011 \wedge 9 = 1$.
Comme 2011 divise $9N$, d'après le théorème de Gauss : 2011 divise N.

3] On sait que $11 | N$ et $2011 | N$ et que $2011 \wedge 11 = 1$, alors 11×2011 divise N
c'est-à-dire : 22121 divise N.

151 Soit x un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2\ [19]$.
1] a/ Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1\ [19]$
b/ Montrer que : $10^{18} \equiv 1\ [19]$
2] Soit $\delta = 18 \wedge (x+1)$
a/ Montrer que $10^{\delta} \equiv 1\ [19]$
b/ Montrer que : $\delta = 18$
c/ En déduire que : $x \equiv 17\ [18]$

Solution

1] a/ On $10^x \equiv 2\ [19]$. Donc : $10^x \times 10 \equiv 20\ [19]$
Comme : $10^x \times 10 = 10^{x+1}$ et $20 \equiv 1\ [19]$,
alors : $10^{x+1} \equiv 1\ [19]$
b/ 19 est un nombre premier et $19 \wedge 10 = 1$
D'après le théorème de Fermat : $10^{18} \equiv 1\ [19]$

2] $\delta = 18 \wedge (x+1)$
a/ Il existe deux entiers naturels α et β tels que : $(x+1)\alpha - 18\beta = \delta$ (Bézout)
On a : $10^{x+1} \equiv 1\ [19]$; donc $(10^{x+1})^{\alpha} \equiv 1\ [19]$
c'est-à-dire : $10^{(x+1)\alpha} \equiv 1\ [19]$
Et on a : $(x+1)\alpha = \delta + 18\beta$.
Donc : $10^{\delta + 18\beta} \equiv 1\ [19]$
c'est-à-dire : $10^{\delta} \times (10^{18})^{\beta} \equiv 1\ [19]$
Comme $10^{18} \equiv 1\ [19]$, alors $(10^{18})^{\beta} \equiv 1\ [19]$
et par suite : $10^{\delta} \times (10^{18})^{\beta} \equiv 10^{\delta}\ [19]$
D'où : $10^{\delta} \equiv 1\ [19]$.
b/ On a : δ divise 18 et $10^{\delta} \equiv 1\ [19]$

Donc : $\delta \in \{1;2;3;6;9;18\}$

Or on : $10^1 \equiv 10[19]$, $10^2 \equiv 5[19]$, $10^3 \equiv 12[19]$
$10^6 \equiv 11[19]$, $10^9 \equiv 18[19]$ et $10^{18} \equiv 1[19]$

D'où : $\delta = 18$

c) On a : $18 = 18 \wedge (x+1)$.
Donc $18 | x+1$ ou encore $x \equiv -1 [18]$
D'où : $x \equiv 17[18]$ (car $-1 \equiv 17[18]$)

Remarque : On a établi que :
$(\forall x \in \mathbb{N})$ $(10^x \equiv 2[19] \Rightarrow x \equiv 17[18])$

152 On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation
(E) : $143x - 195y = 52$

1] a) Déterminer : $143 \wedge 195$. En déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Sachant que le couple $(-1;-1)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en mettant en évidence les étapes de la solution.

2] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \wedge 5 = 1$.
Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$ $n^{4k} \equiv 1[5]$.

3] Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x \equiv y [4]$.
a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $n^x \equiv n^y [5]$.
b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $n^x \equiv n^y [10]$

4] Soit $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(x;y)$ est une solution de l'équation (E).
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système décimal de numération.

Solution

1] a). On peut déterminer le p.g.d.c de 143 et 195 soit en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, soit en utilisant l'algorithme d'Euclide.

⊙ En utilisant la décomposition
On a : $143 = 11 \times 13$ et $195 = 3 \times 5 \times 13$.
Donc : $143 \wedge 195 = 13$

⊙ En utilisant l'algorithme d'Euclide
→ On a : $195 = 143 \times 1 + 52$
Donc : $195 \wedge 143 = 143 \wedge 52$
→ On a : $143 = 2 \times 52 + 39$
Donc : $143 \wedge 52 = 52 \wedge 39$
→ On a : $52 = 1 \times 39 + 13$
Donc : $52 \wedge 39 = 39 \wedge 13$
→ On a : $39 = 3 \times 13$
Donc : $39 \wedge 13 = 13$.
→ D'où : $143 \wedge 195 = 13$

• Comme $143 \wedge 195 = 13$ et $52 = 13 \times 4$,
alors : $143 \wedge 195 | 52$.
Par suite, l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Soit $(a;b;c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$.
L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si, et seulement si, $a \wedge b | c$

b). On a : $143 \times (-1) - 195 \times (-1) = 195 - 143 = 52$
Donc, le couple $(-1;-1)$ est une solution de l'équation (E).

• Soit $(x;y)$ une solution de l'équation (E).
On a : $143x - 195y = 195 - 143$
$143(x+1) = 195(y+1)$
$11 \times 13(x+1) = 15 \times 13(y+1)$
$11(x+1) = 15(y+1)$

Donc : $15 | 11(x+1)$ et $15(y+1) = 11(x+1)$
Comme 11 est premier et $11 \wedge 15 = 1$, alors d'après le théorème de Gauss :
$15 | x+1$ et $15(y+1) = 11(x+1)$
Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$x+1 = 15k$ et $15(y+1) = 11 \times 15k$
c'est-à-dire tel que :
$x+1 = 15k$ et $y+1 = 11k$
Donc : $(\exists k \in \mathbb{Z})$; $\begin{cases} x = 15k - 1 \\ y = 11k - 1 \end{cases}$

• Par ailleurs, pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a :
$143(15k-1) - 195(11k-1) = 195 - 143 = 52$
Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(15k-1; 11k-1)$ est solution de E.

• Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est
$S = \{(15k-1; 11k-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \wedge 5 = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
5 est premier ; donc d'après le théorème de Fermat : $n^4 \equiv 1\ [5]$ et par suite :
$$(n^4)^k \equiv 1\ [5],$$
c'est-à-dire : $n^{4k} \equiv 1\ [5]$.

Ainsi : **Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge 5 = 1$, on a : $(\forall k \in \mathbb{N})\quad n^{4k} \equiv 1\ [5]$.**

3] Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x \equiv y\ [4]$

a) Sans perte de généralité, on peut supposer que $x \geq y$. Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :
$$x - y = 4k \quad \text{ou encore} \quad x = y + 4k.$$
On a : $n^x = n^{y+4k} = n^y \times n^{4k}$

D'après le résultat de 2], $n^{4k} \equiv 1\ [5]$

Donc : $n^y \times n^{4k} \equiv n^y\ [5]$, c'est-à-dire $n^x \equiv n^y\ [5]$.

Ainsi : **Pour $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :**
$$x \equiv y\ [4] \Rightarrow n^x \equiv n^y\ [5]$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x \equiv y\ [4]$

Comme x et y sont de même parité (car $x-y$ est pair), alors n^x et n^y sont de même parité que n.

Donc : $n^x \equiv n^y\ [2]$

Alors $\begin{cases} 5 \mid n^x - n^y & \text{(d'après 3] a/)} \\ 2 \mid n^x - n^y \end{cases}$.

Comme $2 \wedge 5 = 1$, alors $10 \mid n^x - n^y$

D'où : **Pour $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :**
$$x \equiv y\ [4] \Rightarrow n^x \equiv n^y\ [10]$$

4] Soit $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(x;y)$ est une solution de (E) : $143x - 195y = 52$

ou encore : $11x - 15y = 4$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après 1] b/, il existe un entier naturel non nul λ tel que :
$$x = 15\lambda - 1 \quad \text{et} \quad y = 11\lambda - 1$$
On a : $x - y = 4\lambda$. Donc : $x \equiv y\ [4]$

D'après 3] b/) : $n^x \equiv n^y\ [10]$

Comme chaque entier naturel est congru à son chiffre d'unités modulo 10, alors :

n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système décimal.

153 1] a) Vérifier que 503 est premier.

b) Montrer que : $7^{502} \equiv 1\ [503]$.

En déduire que : $7^{2008} \equiv 1\ [503]$.

2] On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation
$$(E) : 49x - 6y = 1.$$
Sachant que le couple $(1;8)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en mettant en évidence les étapes de la solution.

3] On pose : $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

a) Montrer que le couple $(7^{2006}; N)$ est une solution de l'équation (E).

b) Montrer que :
$$N \equiv 0\ [4] \quad \text{et} \quad N \equiv 0\ [503]$$
c) En déduire que N est divisible par 2012.

Solution

1] a) Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à 503 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19

Et 503 n'est divisible par aucun d'eux car :

$503 \equiv 1\ [2]$; $503 \equiv 2\ [3]$; $503 \equiv 3\ [5]$;

$503 \equiv 6\ [7]$; $503 \equiv 8\ [11]$; $503 \equiv 9\ [13]$;

$503 \equiv 10\ [17]$; $503 \equiv 9\ [19]$

Donc : **503 est un nombre premier.**

b) • 503 est premier et $503 \wedge 7 = 1$ (503 et 7 sont deux nombres premiers distincts)

Donc : $7^{502} \equiv 1\ [503]$.

• On a : $(7^{502})^4 \equiv 1\ [503]$.

Donc : $7^{2008} \equiv 1\ [503]$

2] Soit S l'ensemble des solutions de (E)

• Soit $(x;y) \in S$: $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ et $49x - 6y = 1$

On a : $49(x-1) = 6(y-8)$

Donc : $6 \mid 49(x-1)$ et $6(y-8) = 49(x-1)$

Comme $6 \wedge 49 = 1$ (car $49 \times 1 - 6 \times 8 = 1$), alors d'après le théorème de Gauss :
$$6 \mid x-1 \quad \text{et} \quad 6(y-8) = 49(x-1)$$
Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$x - 1 = 6k \quad \text{et} \quad 6(y-8) = 49 \times 6k$$
c'est-à-dire tel que :
$$x - 1 = 6k \quad \text{et} \quad y - 8 = 49k$$

Donc : $x = 6k+1$ et $y = 49k+8$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi : $S \subset \{(6k+1\,;49k+8) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

. Soit $k \in \mathbb{Z}$; on a :

$49(6k+1) - 6(49k+8) = 49\times 1 - 6\times 8 = 1$

Donc $(6k+1\,;49k+8)$ est une solution de l'équation (E).

Ainsi : $\{(6k+1\,;49k+8) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset S$.

. En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $49x - 6y = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$ est $S = \{(6k+1\,;49k+8) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3] a) On a :

$(7-1)(7^{2007} + 7^{2006} + \dots + 7^2 + 7 + 1) = 7^{2008} - 1$

Donc : $6N = 7^2 \times 7^{2006} - 1$

et par suite : $49 \times 7^{2006} - 6N = 1$

Ce qui signifie que :

$(7^{2006}\,; N)$ est une solution de (E).

b) On a : $N = (1 + 7^2 + \dots + 7^{2008}) + (7 + 7^3 + \dots + 7^{2007})$

Et on a :

$$\begin{cases} 1 + 7^2 + \dots + 7^{2008} = 7^{2\times 0} + 7^{2\times 1} + \dots + 7^{2\times 1004} \\ 7 + 7^3 + \dots + 7^{2007} = 7^{2\times 1 - 1} + 7^{2\times 2 - 1} + \dots + 7^{2\times 1004 - 1} \\ \text{et } 7 \equiv -1\,[4] \text{ et } 7^2 \equiv 1\,[4] \end{cases}$$

Donc : $N \equiv (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1004 \text{ termes}}) - (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1004 \text{ termes}})\ [4]$

D'où : $N \equiv 0\,[4]$

- On a : $6N = 7^{2008} - 1$ et $7^{2008} \equiv 1\,[503]$ (d'après 1] b))

Donc : $6N \equiv 0\,[503]$, c'est-à-dire $503 \mid 6N$. Comme 503 est premier et $6 < 503$, alors $503 \wedge 6 = 1$.

D'après le théorème de Fermat :

$N \equiv 0\,[503]$

c) On a :

$$\begin{cases} 4 \mid N \text{ et } 503 \mid N \\ 4 \wedge 503 = 1 \end{cases}$$

Alors : $4 \times 503 \mid N$, c'est-à-dire :

D'où : $2012 \mid N$.

N est divisible par 2012.

154 L'objectif de cet exercice est la recherche des entiers naturels n strictement supérieurs à 1 qui vérifient la propriété :

$(\mathcal{R})$: $3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$.

1] On suppose que n vérifie $(\mathcal{R})$.

Soit p le plus petit diviseur premier positif du nombre n.

a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$.

En déduire que : $p \geq 5$.

b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$

c) Montrer qu'il existe $(a\,;b)$ dans $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$.

d) Soit r et q respectivement le reste et le quotient de la division de a par $p-1$. ($a = q(p-1) + r$, $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < p-1$)

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$

2] Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1, qui vérifie la propriété $(\mathcal{R})$.

Solution

1] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$

Soit p le plus petit diviseur premier positif de n

a) • On a : $n \mid 3^n - 2^n$ et $p \mid n$. Donc : $p \mid 3^n - 2^n$, c'est-à-dire : $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$

- On a : $3^n \equiv 1\,[2]$ (car $3 \equiv 1\,[2]$) et $2^n \equiv 0\,[2]$ (car $n > 1$).

Donc : $3^n - 2^n \equiv 1\,[2]$

Ainsi : $p \neq 2$

- On a : $3^n \equiv 0\,[3]$ (car $n > 0$) et $2^n \equiv (-1)^n\,[3]$ (car $2 \equiv -1\,[3]$).

Donc : $3^n - 2^n \equiv -(-1)^n\,[3]$

Par suite : $3^n - 2^n \equiv 1\,[3]$ ou $3^n - 2^n \equiv -1\,[3]$

Ainsi : $p \neq 3$

- En conséquence, p est un nombre premier positif différent de 2 et de 3.

D'où : $p \geq 5$.

b) p est un nombre premier et $p \neq 2$ et $p \neq 3$

Donc : $p \wedge 2 = 1$ et $p \wedge 3 = 1$ (2 et 3 étant premiers distincts de p).

D'après le théorème de Fermat :

$2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$

4. Montrons d'abord que $n \wedge (p-1) = 1$.
Raisonnons par l'absurde et posons $n \wedge (p-1) = \delta$ et supposons que $\delta > 1$.
Soit p' un nombre premier positif qui divise δ.

p' divise δ et ($\delta | n$ et $\delta | (p-1)$)

Donc : $p' | n$ et $p' \leq \delta \leq p-1$ et p' divise n

On aura :

p' premier positif, p' divise n et $p' \leq p-1 < p$.

Ce qui contredit la définition de p.

Donc : $n \wedge (p-1) = 1$.

- D'après le théorème de Bézout :

$$(\exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2)\ ;\ an - b(p-1) = 1$$

d) Soit $(q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$a = q(p-1) + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < p-1$$

On a : $an - b(p-1) = 1$

Donc : $[q(p-1)+r]n - b(p-1) = 1$

c'est-à-dire

$$rn - (p-1)(b - qn) = 1$$

ou encore : $(p-1)(b-qn) = -1 + rn$

Posons : $k = b - qn$.

On a : $(p-1)k = -1 + rn$

Comme $r \geq 0$ et $n \geq 2$, alors $rn \geq 0$

Donc : $(p-1)k \geq -1$

$(p-1)k$ est nécessairement différent de -1 car $p-1 \geq 4$ (car sinon si $(p-1)k$ est égal à 1, on aura : $p-1 = 1$ et $k = -1$ c'est-à-dire $p = 2$ et $k = -1$; ce qui est absurde)

On en déduit que : $(p-1)k \geq 0$.

Donc : $k \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

En définitive :

Il existe un entier naturel k tel que $rn = 1 + k(p-1)$ (r est le reste de la division de a par $p-1$ et $0 \leq r < p-1$)

2] Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $n > 1$ tel que

$$3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$$

Soit p le plus petit diviseur premier positif de n.

On a : $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Donc : $(2^{p-1})^k \equiv 1\,[p]$ et $(3^{p-1})^k \equiv 1\,[p]$

où k est l'entier naturel dont a montré l'existence et qui vérifie $rn - k(p-1) = 1$

On a : $2^{k(p-1)} \equiv 1\,[p]$ et $3^{k(p-1)} \equiv 1\,[p]$

Donc : $3 \times 3^{k(p-1)} - 2 \times 2^{k(p-1)} \equiv 3 - 2\,[p]$

$$3^{1+k(p-1)} - 2^{1+k(p-1)} \equiv 1\,[p]$$

Donc : $3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1\,[p]$ (•)

Par ailleurs : $3^n \equiv 2^n\,[p]$ (d'après 1]a))

Donc : $(3^n)^r \equiv (2^n)^r\,[p]$

c'est-à-dire : $3^{rn} \equiv 2^{rn}\,[p]$

ou encore : $3^{rn} - 2^{rn} \equiv 0\,[p]$ (••)

De (•) et (••), on déduit que : $1 \equiv 0\,[p]$ c'est-à-dire que p divise 1 ; ce qui est contradictoire.

Par conséquent, **il n'existe pas d'entiers $n > 1$ tel que : $3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$**

155 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose : $a_n = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ fois}}1$ (n fois le chiffre 3)

1] Vérifier que a_1 et a_2 sont premiers.

2] Montrer que : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3] Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})\ 10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$

4] Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})\ 3a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$.

En déduire que :

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ 31 | a_{30k+1}$$

5] Montrer que :

Si $n \equiv 1\,[30]$, alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Solution

1]. On a : $a_1 = 31$ et 31 est premier.

Donc : **a_1 est premier.**

(On a : $2^2 < 31$, $3^2 < 31$, $5^2 < 31$ et $31 \equiv 1\,[2]$, $31 \equiv 1\,[3]$ et $31 \equiv 1\,[5]$

- Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à $a_2 = 331$ sont : 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Et 331 n'est divisible par aucun d'eux car :

$331 \equiv 1\,[2]$, $331 \equiv 1\,[3]$, $331 \equiv 1\,[5]$

$331 \equiv 2\,[7]$, $331 \equiv 1\,[11]$ et $331 \equiv 6\,[13]$

Donc : a_2 est un nombre premier.

2] On a : $3a_n = \underbrace{999\ldots}_{n \text{ fois}}93$ (n fois le chiffre 9)

$3a_n = \underbrace{999\ldots99}_{(n+1)\text{fois}} - 6$ ($n+1$ fois le chiffre 9)

Comme $\underbrace{99\ldots99}_{(n+1)\text{fois}} = 10^{n+1} - 1$, alors :

$3a_n = 10^{n+1} - 7$.

D'où : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3] 31 est premier et $31 \wedge 10 = 1$ ($0 < 10 < 31$)

D'après le théorème de Fermat, on a :

$$10^{30} \equiv 1\,[31]$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $(10^{30})^k \equiv 1\,[31]$

c'est-à-dire :

$$10^{30k} \equiv 1\,[31]$$

Donc : $10^{3k} \times 10^2 \equiv 100\,[31]$

c'est-à-dire : $10^{3k+2} \equiv 100\,[31]$

Comme $100 = 3 \times 31 + 7$, alors : $100 \equiv 7\,[31]$.

D'où : $(\forall k \in \mathbb{N})\quad 10^{3k+2} \equiv 7\,[31]$.

4] Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On a : $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$

et $10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$

Donc : $3a_{30k+1} + 7 \equiv 7\,[31]$

Donc : $3a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$

- Il en découle que : $31 \mid 3a_{30k+1}$.

Comme $31 \wedge 3 = 1$, alors d'après le théorème de Gauss : $31 \mid a_{30k+1}$

5] Supposons que : $n \equiv 1\,[30]$ c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 30k + 1$.

D'après 4], on a : $31 \mid a_{30k+1}$

c'est-à-dire : $31 \mid a_n$. Par suite 31 divise $a_n x + 31y$ pour tout $(x;y)$ de $\mathbb{Z}^2$; ce qui infère que $a_n x + 31y \neq 1$.

Par conséquent :

Si $n \equiv 0\,[30]$, alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution.

156 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $b_n = 2 \times 10^n + 1$ et $c_n = 2 \times 10^n - 1$

1] Montrer que : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$.

En déduire que : $b_n \wedge c_n = 1$

2] Trouver un couple $(x_n ; y_n)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $b_n x_n + c_n y_n = 1$

Solution

1]. On a : $b_n = c_n + 2$

Donc : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

De façon plus générale si b et c sont deux entiers relatifs tels que :

$b = \alpha c + \beta$ où $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{Z}^2$,

alors $b \wedge c = c \wedge \beta$

- On sait que si c est un nombre impair, alors $c \wedge 2 = 1$.

Comme c_n est impair ($c_n = 2 \times 10^n - 1$), alors : $c_n \wedge 2 = 1$.

D'où : $b_n \wedge c_n = 1$.

2] On a : $b_n = c_n + 2$ et $c_n = (10^n - 1) \times 2 + 1$

Donc : $1 = c_n - (10^n - 1) \times 2$

$1 = c_n - (10^n - 1)(b_n - c_n)$.

D'où : $(1 - 10^n) b_n + 10^n c_n = 1$

Prendre : $x_n = 1 - 10^n$ et $y_n = 10^n$

157 Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{1439} \equiv 1436\,[2015]$.

1] Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que : $1436 \wedge 2015 = 1$.

2] Soit d un diviseur commun de x et de 2015.

a) Montrer que : d divise 1436.

b) En déduire que : $x \wedge 2015 = 1$.

3] a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :

$x^{1440} \equiv 1\,[5]$ et $x^{1440} \equiv 1\,[13]$ et $x^{1440} \equiv 1\,[31]$

(remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$)

b) Montrer que $x^{1440} \equiv 1\,[65]$ et en déduire que : $x^{1440} \equiv 1\,[2015]$.

4] Montrer que : $x \equiv 1051\,[2015]$.

Solution

1] On a : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$.

D'après le théorème de Bézout : $1436 \wedge 2015 = 1$.

2] Soit $d | x$ et $d | 2015$,

a) Comme $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{1439} - 1436 = 2015k$

c'est-à-dire : $1436 = x^{1439} - 2015k$

Comme $d | x$ et $d | 2015$, alors :

$$d | x^{1439} - 2015k$$

D'où : d divise 1436

b) Soit $\delta = x \wedge 2015$: $\delta | x$ et $\delta | 2015$.

D'après la question précédente : $\delta | 1436$;

et puisque : $\delta | 2015$, alors $\delta | 1436 \wedge 2015$

c'est-à-dire $\delta | 1$. Donc : $\delta = 1$

Ainsi : $x \wedge 2015 = 1$

3] a) On a : $2015 = 5 \times 13 \times 31$ et $x \wedge 2015 = 1$.

Donc : $x \wedge 5 = 1$ et $x \wedge 13 = 1$ et $x \wedge 31 = 1$.

Et 5, 13 et 31 sont premiers ; d'après le théorème de Fermat :

$$x^4 \equiv 1 [5] \text{ et } x^{12} \equiv 1 [13] \text{ et } x^{30} \equiv 1 [31]$$

Donc :

$$(x^4)^{360} \equiv 1 [5] \text{ et } (x^{12})^{120} \equiv 1 [13] \text{ et } (x^{30})^{48} \equiv 1 [31]$$

D'où :

$$x^{1440} \equiv 1 [5] \text{ et } x^{1440} \equiv 1 [13] \text{ et } x^{1440} \equiv 1 [31]$$

b) • On a : $5 | x^{1440} - 1$ et $13 | x^{1440} - 1$ et $5 \wedge 13 = 1$

Donc : $5 \times 13 | x^{1440} - 1$, c'est-à-dire : $65 | x^{1440} - 1$.

D'où : $x^{1440} \equiv 1 [65]$

• On a :

$$\begin{cases} 65 | x^{1440} - 1 \text{ et } 31 | x^{1440} - 1 \\ 65 \wedge 31 = 1 \text{ (car } 5 \wedge 31 = 1 \text{ et } 13 \wedge 31 = 1) \end{cases}$$

Donc : $65 \times 31 | x^{1440} - 1$,

c'est-à-dire : $2015 | x^{1440} - 1$.

D'où : $x^{1440} \equiv 1 [2015]$

4] On a : $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$ (hypothèse)

Donc : $x \times x^{1439} \equiv 1436x [2015]$,

c'est-à-dire : $x^{1440} \equiv 1436x [2015]$

D'après 3], on a : $x^{1440} \equiv 1 [2015]$

Donc : $1436x \equiv 1 [2015]$

Par suite : $1436 \times 1051 x \equiv 1051 [2015]$

Par ailleurs : $1436 \times 1051 = 1 + 2015 \times 749$

Donc : $1436 \times 1051 \equiv 1 [2015]$

Il vient aussitôt : $1436 \times 1051 x \equiv x [2015]$

D'où : $x \equiv 1051 [2015]$

158 1] a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux, alors $a^{2016} \equiv 1 [13]$

2] On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$(E) : x^{2015} \equiv 2 [13]$$

Soit x une solution de l'équation (E).

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x \equiv 7 [13]$.

3] Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7 + 13k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Solution</u>

1] Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que : $a \wedge 13 = 1$.

Comme 13 est un nombre premier, alors d'après le théorème de Fermat : $a^{12} \equiv 1 [13]$.

Donc : $(a^{12})^{168} \equiv 1 [13]$, c'est-à-dire : $a^{2016} \equiv 1 [13]$.

D'où : $(\forall a \in \mathbb{Z})\ a \wedge 13 = 1 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1 [13]$.

2] a) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{2015} \equiv 2 [13]$

Alors : 13 ne divise pas x^{2015} et $x^{2015} \wedge 13 = 1$

Donc : $x \wedge 13 = 1$.

(Car sinon si $x \wedge 13 \neq 1$, alors $x \wedge 13 = 13$ (13 étant premier) c'est-à-dire 13 divise x et 13 divisera x^{2015} ou encore $x^{2015} \wedge 13 = 13$; ce qui contredit l'hypothèse).

D'où : $x \wedge 13 = 1$.

b) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{2015} \equiv 2 [13]$

Comme $x \wedge 13 = 1$, alors d'après le résultat de 1], on a : $x^{2016} \equiv 1 [13]$

De $x^{2015} \equiv 2 [13]$, on tire : $x^{2015} \times x \equiv 2x [13]$

c'est-à-dire : $x^{2016} \equiv 2x [13]$.

Donc : $2x \equiv 1 [13]$ ou encore : $2x \equiv 14 [13]$

Donc : $13 | 2(x-7)$. Comme $13 \wedge 2 = 1$, alors par le théorème de Gauss $13 | x - 7$.

Donc : $x \equiv 7 [13]$

3] • On a : $x \in S \Rightarrow x \equiv 7 [13]$

• Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x \equiv 7 [13]$.

On a : $x^{2015} \equiv 7^{2015} [13]$

Comme $7 \wedge 13 = 1$, alors d'après le théorème de Fermat, on a : $7^{12} \equiv 1\ [13]$

Donc : $(7^{12})^{167} \equiv 1\ [13]$, c'est-à-dire :

$7^{2004} \equiv 1\ [13]$ et par suite : $7^{2004} \times 7^{11} \equiv 7^{11}\ [13]$;

par conséquent : $7^{2015} \equiv 7^{11}\ [13]$

Par ailleurs : $7 \times 7^{11} \equiv 1\ [13]$.

Donc : $2 \times 7 \times 7^{11} \equiv 1\ [13]$

$14 \times 7^{11} \equiv 2\ [13]$.

Comme : $14 \equiv 1\ [13]$, alors $14 \times 7^{11} \equiv 7^{11}\ [13]$.

Donc : $7^{11} \equiv 2\ [13]$.

Ce qui implique : $7^{2015} \equiv 2\ [13]$.

D'où : $x^{2015} \equiv 2\ [13]$

Ainsi : $x \equiv 7\ [13] \Rightarrow x \in S$.

. En définitive : $x \in S \Leftrightarrow x \equiv 7\ [13]$

. En conclusion : $S = \{7 + 13k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(159) A. Soit $(a;b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$.

1] Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171 = 3 \times 57$).

2] Montrer que (173 divise a) si et seulement si (173 divise b)

3] On suppose que 173 divise a.
Montrer que : 173 divise $a + b$.

4] On suppose que 173 ne divise pas a.

a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $a^{172} \equiv b^{172}\ [173]$.

b) Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0\ [173]$.

c) En déduire que 173 divise $a + b$.

B. On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation

$(E) : x^3 + y^3 = 173(xy+1)$

1] Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E). On pose $x + y = 173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

b) Montrer que : $k = 1$

2] Résoudre l'équation (E).

Solution

A. 1] On a : $a^3 \equiv -b^3\ [173]$. Donc : $(a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57}\ [173]$

c'est-à-dire : $a^{3\times 57} \equiv -b^{3\times 57}\ [173]$.

D'où : $a^{171} \equiv -b^{171}\ [173]$.

2] Comme 173 est premier, alors :

$173 \mid a \Leftrightarrow 173 \mid a^3$

Comme $173 \mid a^3 + b^3$, alors

$173 \mid a \Leftrightarrow \begin{cases} 173 \mid a^3 \\ 173 \mid a^3 + b^3 \end{cases} \Leftrightarrow 173 \mid b^3$

D'où : $173 \mid a \Leftrightarrow 173 \mid b$.

3] On suppose que $173 \mid a$.

D'après 2] A., on a : $173 \mid b$.

Donc : $173 \mid a + b$.

4] On suppose que 173 ne divise pas a.

a) D'après 2] a), on a : $173 \nmid b$

D'après le théorème de Fermat, on a :

$a^{172} \equiv 1\ [173]$ et $b^{172} \equiv 1\ [173]$

Donc : $a^{172} \equiv b^{172}\ [173]$

b) On a : $a^{171} \equiv -b^{171}\ [173]$ et $a^{172} \equiv b^{172}\ [173]$

Donc : $b \times a^{171} \equiv -b^{172}\ [173]$

et par suite : $b a^{171} \equiv -a^{172}\ [173]$

Donc : $a^{172} + a^{171} b \equiv 0\ [173]$,

c'est-à-dire : $a^{171}(a+b) \equiv 0\ [173]$.

c) On a : $173 \nmid a$; donc $173 \nmid a^{171}$ et $a^{171} \wedge 173 = 1$

Comme $173 \wedge a^{171} = 1$ et $173 \mid a^{171}(a+b)$, alors d'après le théorème de Gauss :

173 divise $a + b$

B. 1] a) On a : $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 173(xy+1)$

Comme $x + y = 173k$, alors :

$173k\left[(x-y)^2 + xy\right] = 173(xy+1)$

$k(x-y)^2 + kxy = xy + 1$

Donc : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

b) On a : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

et $k(x-y)^2 \in \mathbb{N}$ et $(k-1)xy \in \mathbb{N}$ (car $k \in \mathbb{N}^*$)

Deux cas se présentent.

1er cas : $(k-1)xy = 1$ et $k(x-y)^2 = 0$

On aura : $k - 1 = x = y = 1$ c'est-à-dire $\begin{cases} x = y = 1 \\ k = 2 \end{cases}$

et cela impliquera : $173k = 346$ et $x + y = 2$;

ce qui contredit que : $173k = x + y$.

2e cas : $(k-1)xy = 0$ et $k(x-y)^2 = 1$

On aura : $k = 1$

2] Soit S l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- On a : $(x;y) \in S \Rightarrow \begin{cases} x+y=173 \\ (x-y)^2=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\begin{cases} x+y=173 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=-1 \end{cases} \right)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases}$

$(x;y) \in S \Rightarrow [(x;y)=(87;86) \text{ ou } (x;y)=(86;87)]$

- On a :

$87^3+86^3=(87+86)(87^2-87\times 86+86^2)$

$87^3+86^3 = 173\,(87(87-86)+86^2)$

$87^3+86^3 = 173\,(87+86^2)$

$87^3+86^3 = 173\,(1+86\times 87)$

Donc : $(87;86)$ et $(86;87)$ appartiennent à S.

- Conclusion : $S=\{(87;86);(86;87)\}$

160 On admet que 2017 est premier, et que $2016=2^5\times 3^2\times 7$.

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1] Soit $(x;y)$ un couple de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que :

$$px+y^{p-1}=2017$$

a/ Vérifier que : $p<2017$.

b/ Montrer que p ne divise pas y.

c/ Montrer que : $y^{p-1}\equiv 1[p]$.

En déduire que : p divise 2016.

d/ Montrer que : $p=7$.

2] Déterminer, selon les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$px+y^{p-1}=2017.$$

Solution

1] a) Comme $(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire :

$1\leq x$ et $1\leq y$, alors :

$p\leq px$ et $1\leq y^{p-1}$

Donc : $p+1\leq px+y^{p-1}$

et par suite : $p+1\leq 2017$.

D'où : $p<2017$

b) Raisonnons par l'absurde.

Supposons que p divise y.

Alors $p\,|\,y^{p-1}$. Comme $p\,|\,px$, alors

$p\,|\,px+y^{p-1}$ c'est-à-dire $p\,|\,2017$

Ce qui contredit le fait que $p<2017$ et $p\wedge 2017=1$.

Donc : p ne divise pas y.

c) • p est un nombre premier et p ne divise pas y.

D'après le théorème de Fermat : $y^{p-1}\equiv 1[p]$

• Par ailleurs : $px\equiv 0[p]$.

Donc : $px+y^{p-1}\equiv 1[p]$, c'est-à-dire :

$2017\equiv 1[p]$.

D'où : p divise 2016.

d) On a : $p\,|\,2016$ et p premier et $2016=2^5\times 3^2\times 7$ et $p\geq 5$. Donc : $p=7$.

2] ▫ Soit p un nombre premier positif.

Soit $S_p=\{(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \mid px+y^{p-1}=2017\}$

▲ 1er cas : $p=2$

Soit $(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. On a :

$(x;y)\in S_2 \Leftrightarrow 2x+y=2017$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x<2017 \\ y=2017-2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq x\leq 1008 \\ y=2017-2x \end{cases}$

D'où : Pour $p=2$,

$S_2=\{(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \mid 2x+y=17\}$

$S_2=\{(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \mid 1\leq x\leq 1008 \text{ et } y=2017-2x\}$

▲ 2e cas : $p=3$

Soit $(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. On a :

- $(x;y)\in S_3 \Leftrightarrow 3x+y^2=2017$.
- Et on a : $\begin{cases} 3x+y^2=2017 \Rightarrow y^2<2017 \\ 3x+y^2=2017 \Rightarrow y^2\equiv 1[3] \end{cases}$

(car $2017\equiv 1[3]$ et $3x\equiv 0[3]$)

Donc : $3x+y^2=2017 \Rightarrow 1\leq y\leq 44$

$3x+y^2=2017 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y\equiv 1[3] \\ \text{ou} \\ y\equiv -1[3] \end{array}\right.$

$3x+y^2=2017 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y=3k+1;\ k\in\mathbb{N} \\ \text{ou} \\ y=3k+2;\ k\in\mathbb{N} \end{array}\right.$

- Soit $k\in\mathbb{N}$. On a :

$1\leq 3k+1\leq 44 \Leftrightarrow 0\leq 3k\leq 43 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 14$

$1\leq 3k+2\leq 44 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 14$

- Soit $(x;y)\in S_3$ tel que : $y=3k+1$ et $0\leq k\leq 14$

On a : $3x+(3k+1)^2=2017$

Donc : $x=672-3k^2-2k$

, Soit $(x;y) \in S_3$ tel que :

$y = 3k+2$ et $0 \leq k \leq 14$

On a : $3x + (3k+2)^2 = 2017$

Donc : $x = 671 - 3k^2 - 4k$

D'où : Pour $p=3$,

$S_3 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 3x + y^2 = 2017\}$

$S_3 = \{(672 - 3k^2 - 2k ; 3k+1) \mid 0 \leq k \leq 14\} \cup$
$\cup \{(671 - 3k^2 - 4k ; 3k+2) \mid 0 \leq k \leq 14\}$

. 3e cas : $p \geq 5$

D'après ce qui précède,

⊙ Si $p=5$ ou $p>5$, alors $S_p = \emptyset$

⊙ Étudions le cas $p=7$

Soit $(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

On a : $(x;y) \in S_7 \Leftrightarrow 7x + y^6 = 2017$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^6 < 2017 \\ 7x + y^6 = 2017 \end{cases}$

Or $y^6 < 2017 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow y \in \{1;2;3\}$

. On a : $(x;1) \in S_7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2016 \\ y = 1 \end{cases}$

$(x;1) \in S_7 \Leftrightarrow (x;y) = (288;1)$

. On a : $(x;2) \in S_7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 1953 \\ y = 2 \end{cases}$

$(x;2) \in S_7 \Leftrightarrow (x;y) = (279;2)$

. On a : $(x;3) \in S_7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 1288 \\ y = 2 \end{cases}$

$(x;3) \in S_7 \Leftrightarrow (x;y) = (184;3)$

D'où : $S_7 = \{(184;3);(279;2);(288;1)\}$

On peut vérifier que les derniers couples sont effectivement des solutions de l'équation

$7x + y^6 = 2017.$

En effet,

$7 \times 184 + 3^6 = 1288 + 729 = 2017$

$7 \times 279 + 2^6 = 1953 + 64 = 2017$

$7 \times 288 + 1^6 = 2016 + 1 = 2017$

Remarque :

On peut refaire l'exercice en remplaçant 2017 par le nombre premier 2027

161 Soit p un nombre premier qui s'écrit $p = 3 + 4k$, où $k \in \mathbb{N}^*$

1] Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{Z}) \ (x^2 \equiv 1[p] \Rightarrow x^{p-5} \equiv 1[p])$.

2] Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

a/ Montrer que : $x \wedge p = 1$

b/ Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

c/ Vérifier que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$

d/ En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$.

3] Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

Solution

1] Soit $x \in \mathbb{Z}$. On suppose que $x^2 \equiv 1[p]$.

Alors : $(x^2)^{2k-1} \equiv 1[p]$, c'est-à-dire : $x^{4k-2} \equiv 1[p]$

Or $p - 5 = 4k - 2$, alors : $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

En conclusion :

$(\forall x \in \mathbb{Z}) \ (x^2 \equiv 1[p] \Rightarrow x^{p-5} \equiv 1[p])$

2] a) Dans cette question $x \in \mathbb{Z}$ et $x^{p-5} \equiv 1[p]$

Donc : p ne divise pas x^{p-5} et par suite : p ne divise pas x (car x est premier).

D'où : $x \wedge p = 1$ (dès que : $x^{p-5} \equiv 1[p]$)

b) Comme p est premier et $x \wedge p = 1$, alors d'après le théorème de Fermat : $x^{p-1} \equiv 1[p]$.

c) On a : $2 + (k-1)(p-1) - k(p-5) = 2 - p + 5k - (k-1)$

$2 + (k-1)(p-1) - k(p-5) = 4k + 3 - p = 0$

Donc : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$.

d) . On a : $x^{p-5} \equiv 1[p]$ (hypothèse).

Donc : $(x^{p-5})^k \equiv 1[p]$, c'est-à-dire $x^{k(p-1)} \equiv 1[p]$

. On a : $x^{p-1} \equiv 1[p]$ (d'après 1] b/).

Donc : $(x^{p-1})^{k-1} \equiv 1[p]$, c'est-à-dire $x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$

Par suite : $x^2 \times x^{(k-1)(p-1)} \equiv x^2 [p]$,

c'est-à-dire : $x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv x^2 [p]$

Comme $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$, alors :

$x^2 \equiv 1[p]$

3] 67 est un nombre premier (à vérifier) et $67 = 3 + 4 \times 16$; on a : $62 = 67 - 5$.

D'après ce qui précède :

$x^{62} \equiv 1[67] \Leftrightarrow x^2 \equiv 1[67]$

Par ailleurs :

$x^2 \equiv 1[67] \Leftrightarrow 67 \mid (x-1)(x+1)$

Comme 67 est premier, alors

$x^2 \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow (67 \mid x-1 \text{ ou } 67 \mid x+1)$

$\Leftrightarrow (x \equiv 1\,[67] \text{ ou } x \equiv 66\,[67])$

Donc : $x^{66} \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow (x \equiv 1\,[67] \text{ ou } x \equiv 66\,[67])$

En conclusion :

l'ensemble des solutions de l'équation $x^{66} \equiv 1\,[67]$, dans $\mathbb{Z}$, est

$S = \{67k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{67k+66 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(162) On admet que 2969 est un nombre premier.

Soit $(n;m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0\,[2969]$

1] Dans cette question, on suppose que : 2969 ne divise pas n

a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z})\,;\ u \times n \equiv 1\,[2969]$

b) En déduire que :

$(u \times m)^8 \equiv -1\,[2969]$ et $(u \times m)^{2968} \equiv -1\,[2969]$

(On remarquera que : $2968 = 8 \times 371$)

c) Montrer que : 2969 ne divise pas $u \times m$.

d) En déduire que l'on a aussi :

$(u \times m)^{2968} \equiv 1\,[2969]$.

2] a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

b) Montrer que :

$n^8 + m^8 \equiv 0\,[2969] \Leftrightarrow (n \equiv 0\,[2969] \text{ et } m \equiv 0\,[2969])$

Solution

1] a) 2969 est un nombre premier et $2969 \wedge n = 1$ (car 2969 ne divise pas n et 2969 premier)

D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$u \times n - 2969v = 1$

C'est-à-dire tels que : $u \times n = 1 + 2969v$

Et on a : $1 + 2969v \equiv 1\,[2969]$.

D'où : **$(\exists u \in \mathbb{Z})\,;\ u \times n \equiv 1\,[2969]$**

b) On en déduit $(u \times n)^8 \equiv 1\,[2969]$

Par ailleurs : $(u \times m)^8 = u^8 \times m^8$

et $m^8 \equiv -n^8\,[2969]$.

Donc : $(u \times m)^8 \equiv u^8 \times (-n^8)\,[2969]$

$(u \times m)^8 \equiv -(u \times n)^8\,[2969]$

D'où : **$(u \times m)^8 \equiv -1\,[2969]$**

• Il s'ensuit que : $[(u \times m)^8]^{371} \equiv (-1)^{371}\,[2969]$

c'est-à-dire : $(u \times m)^{8 \times 371} \equiv (-1)^{371}\,[2969]$

Comme $(-1)^{371} = -1$ et $8 \times 371 = 2968$,

alors : **$(u \times m)^{2968} \equiv -1\,[2969]$**

c) 2969 est premier et 2969 ne divise pas $(u \times m)^{2968}$.

Donc : **2969 ne divise pas $u \times m$**

d) 2969 ne divise pas $u \times m$.

Comme 2969 est premier, alors d'après le théorème de Fermat :

$(u \times m)^{2968} \equiv 1\,[2969]$

2] a) Raisonnons par l'absurde et supposons que 2969 ne divise pas n.

D'après les résultats de 1], on aura :

$$\begin{cases} (u \times m)^{2968} \equiv -1\,[2969] \\ (u \times m)^{2968} \equiv 1\,[2969] \end{cases}$$

On aura : $1 \equiv -1\,[2969]$

Ce qui impossible (car cela impliquera que 2969 divise 2)

Donc :

Si $(n;m) \in \mathbb{N}^2$ vérifie $n^8 + m^8 \equiv 0\,[2969]$, alors 2969 divise n.

b) • Soit $(n;m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n^8 + m^8 \equiv 0\,[2969]$.

Alors $2969 \mid n$ c'est-à-dire $n \equiv 0\,[2969]$.

Donc : $n^8 \equiv 0\,[2969]$ et par suite $m^8 \equiv 0\,[2969]$

c'est-à-dire $2969 \mid m^8$. Donc : $2969 \mid m$ (car 2969 est premier)

Ainsi :

$n^8 + m^8 \equiv 0\,[2969] \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0\,[2969] \\ m \equiv 0\,[2969] \end{cases}$

• Il est clair que :

$$\begin{cases} n \equiv 0\,[2969] \\ m \equiv 0\,[2969] \end{cases} \Rightarrow n^8 + m^8 \equiv 0\,[2969]$$

Conclusion :

Pour $(n;m) \in \mathbb{N}^2$

$n^8 + m^8 \equiv 0\,[2969] \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0\,[2969] \\ m \equiv 0\,[2969] \end{cases}$

163 On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation

(D) : $7x^3 - 13y = 5$.

1] Soit $(x;y)$ une solution de (D).

a/ Montrer que : $x \wedge 13 = 1$.

b/ En déduire que : $x^{12} \equiv 1\ [13]$

c/ Montrer que : $x^3 \equiv 10\ [13]$

d/ En déduire que : $x^{12} \equiv 3\ [13]$

2] Déduire des questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Solution

1] Soit $(x;y)$ une solution de (D) : $\begin{cases}(x;y) \in \mathbb{Z}^2 \\ 7x^3 - 13y = 5\end{cases}$

a/ Soit $\delta = x \wedge 13$.

$(\delta | x \text{ et } \delta | 13) \Rightarrow (\delta | 7x^3 - 13y \text{ et } \delta | 13)$

$\Rightarrow \delta | 5 \text{ et } \delta | 13$

Comme $5 \wedge 13 = 1$, alors $\delta = 1$.

Donc : $x \wedge 13 = 1$

b/ 13 est un nombre premier et $x \wedge 13 = 1$.

D'après le théorème de Fermat : $x^{12} \equiv 1\ [13]$

c/ On a : $7x^3 = 5 + 13y$

Donc : $7x^3 \equiv 5\ [13]$

Donc : $2 \times 7x^3 \equiv 10\ [13]$

Comme : $2 \times 7 \equiv 1\ [13]$, alors : $2 \times 7x^3 \equiv x^3\ [13]$

D'où : $x^3 \equiv 10\ [13]$.

d/ On a : $x^3 \equiv -3\ [13]$.

Donc : $(x^3)^4 \equiv (-3)^4\ [13]$,

c'est-à-dire $x^{12} \equiv 3^4\ [13]$

Par ailleurs $3^4 = 81 = 6 \times 13 + 3$; donc :

$3^4 \equiv 3\ [13]$.

Donc : $x^{12} \equiv 3\ [13]$.

2] Raisonnons par l'absurde.

Supposons que l'équation (D) : $7x^3 - 13y = 5$, admet une solution $(x;y)$ dans $\mathbb{Z}^2$.

D'après ce qui précède, on aura

$x^{12} \equiv 1\ [13]$ (d'après 1] b/)

et $x^{12} \equiv 3\ [13]$ (d'après 1] d/)

On aurait $3 \equiv 1\ [13]$,

c'est-à-dire 13 divise 2 ; ce qui est impossible.

Donc, l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

164 Soit p et q deux nombres premiers positifs tels que : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1\ [pq]$.

1] a/ Montrer que : $p \wedge 9 = 1$.

b/ En déduire que :

$9^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $9^q \equiv 1\ [p]$

2] a/ Montrer que : $(p-1) \wedge q = 1$

b/ En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p = 2$.

3] a/ En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :

$9^{q-1} \equiv 1\ [q]$

b/ En déduire que : $q = 5$.

Solution

1] Comme : $9^{p+q-1} \equiv 1\ [pq]$, alors $pq \mid 9^{p+q-1} - 1$

c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que :

$9^{p+q-1} - 1 = \alpha pq$

ou encore $9 \times 9^{p+q-2} - p(\alpha q) = 1$

Comme $p < q$, alors $p + q \geq 2 + q \geq 5$,

et par suite $p + q - 2 \geq 3$.

Ainsi $9u - pv = 1$ où $u = 9^{p+q-2}$ et $v = \alpha q$ et $(u;v) \in \mathbb{N}^2$.

D'après le théorème de Bézout : $p \wedge 9 = 1$

Autre solution

On a : $9^{p+q-1} \equiv 1\ [pq]$.

Comme p divise pq, alors $9^{p+q-1} \equiv 1\ [p]$.

Donc : p ne divise pas 9^{p+q-1} et puisque p est premier, alors p ne divise pas 9.

Donc : $p \wedge 9 = 1$

2] a/ On a : $1 \leq p - 1 < p < q$. Donc : $1 \leq p - 1 < q$

Comme q est premier, alors : $(p-1) \wedge q = 1$.

b/ • Comme $(p-1) \wedge q = 1$, alors d'après le théorème de Bézout, il existe $(\lambda;\mu) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $(p-1)\lambda - q\mu = 1$

Effectuons la division euclidienne de λ par q : Il existe $(t;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $\lambda = qt + r$ et $0 \leq r < q$.

Donc : $(p-1)(qt + r) - q\mu = 1$

$(p-1)r - q(\mu - (p-1)t) = 1$

$qs = (p-1)r - 1$ où $s = \mu - (p-1)t$

On a : $(p-1)r \geq 0$ (car $r \geq 0$ et $p-1 \geq 1$)

Donc $qs \geq -1$

On ne peut pas avoir $qs = -1$ (car $q \geq 3$)

Donc : $qs \geq 0$ (car qs est un entier)

Comme $q \geq 3$, alors $s \in \mathbb{N}$.

Ainsi : $(\exists (r;s) \in \mathbb{N}^2)$; $(p-1)r - qs = 1$

Par ailleurs : $9^{p-1} \equiv 1 [p]$ et $9^q \equiv 1 [p]$

Donc : $(9^{p-1})^r \equiv 1 [p]$ et $(9^q)^s \equiv 1 [p]$

c'est-à-dire :

$9^{(p-1)r} \equiv 1 [p]$ et $9^{qs} \equiv 1 [p]$

$9^{(p-1)r} \equiv 1 [p]$ et $9^{qs} \times 9 \equiv 9 [p]$

$9^{(p-1)r} \equiv 1 [p]$ et $9^{qs+1} \equiv 9 [p]$

Comme $(p-1)r = qs+1$, alors $9 \equiv 1 [p]$

Donc : p divise 8.

Puisque p est premier, alors : $p = 2$

3] a) On a : $pq \mid 9^{p+q-1} - 1$ et $q \mid pq$.

Alors : $q \mid 9^{p+q-1} - 1$ et $9^{p+q-1} \equiv 1 [q]$

Donc : q ne divise pas 9^{p+q-1}

Comme q est premier, alors q ne divise pas 9. Donc : $9 \wedge q = 1$.

D'après le théorème de Fermat : $9^{q-1} \equiv 1 [q]$

b) • On a : $9 \equiv 1 [2]$; donc : $9^{q-1} \equiv 1 [2]$

c'est-à-dire $2 \mid 9^{q-1} - 1$.

D'autre part $q \mid 9^{q-1} - 1$ (car $9^{q-1} \equiv 1 [q]$)

Comme q est premier et $2 < q$, alors

$2q \mid 9^{q-1} - 1$.

D'où : $9^{q-1} \equiv 1 [2q]$.

• Par hypothèse $9^{2+q-1} \equiv 1 [2q]$.

Donc : $9^{q+1} \equiv 1 [2q]$

• De $9^{q-1} \equiv 1 [2q]$, on déduit que :

$9^2 \times 9^{q-1} \equiv 9^2 [2q]$, c'est-à-dire :

$9^{q+1} \equiv 81 [2q]$.

• Il en découle que : $81 \equiv 1 [2q]$

Donc : $2q \mid 80$

Par suite : q divise 40.

Comme q est un nombre premier supérieur strictement à 2, alors :

$q = 5$.

(165) A. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

(E) : $47x - 43y = 1$

1] Vérifier que le couple $(11;12)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2] Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

B. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation

(F) $x^{41} \equiv 4 [43]$.

1] Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)

a) Montrer que : $x \wedge 43 = 1$.

En déduire que : $x^{42} \equiv 1 [43]$

b) Montrer que : $4x \equiv 1 [43]$.

En déduire que : $x \equiv 11 [43]$

2] Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F) dans $\mathbb{Z}$.

C. On considère dans $\mathbb{Z}$ le système de deux équations :

(G) : $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 [43] \\ x^{47} \equiv 10 [47] \end{cases}$

1] Soit x une solution du système (G).

a) Montrer que x est solution du système :

(H) : $\begin{cases} x \equiv 11 [43] \\ x \equiv 10 [47] \end{cases}$

b) En déduire que : $x \equiv 527 [2021]$

2] Déterminer, dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des solutions du système (G).

Solution

A. 1] On a : $47 \times 11 - 43 \times 12 = 517 - 516 = 1$.

Donc : $(11;12)$ est une solution de (E).

2]. Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (E).

On a : $47x - 43y = 1$

$47x - 43y = 47 \times 11 - 43 \times 12$

$47(x-11) = 43(y-12)$

Donc : $43 \mid 47(x-11)$ et $43(y-12) = 47(x-11)$

43 et 47 sont deux nombres premiers distincts ; donc : $43 \wedge 47 = 1$. D'après le théorème de Gauss, on a :

$43 \mid x-11$ et $43(y-12) = 47(x-11)$

Donc, il existe un entier relatif k tel que :

$x - 11 = 43k$ et $43(y-12) = 47 \times 43k$

c'est-à-dire tel que :

$x = 43k + 11$ et $y = 47k + 12$

• D'autre part :
$47(43k+11)-43(47k+12)=47\times 11-43\times 12=1$.
Donc, pour k de $\mathbb{Z}$, le couple $(43k+11;47k+12)$ est une solution de (E).
• En conclusion : **L'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$ est :**
$$S=\{(43k+11;47k+12)\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

B.1] Soit $x\in\mathbb{Z}$ tel que : $x^{41}\equiv 4\,[43]$.

a) • 43 ne divise pas x^{41} et 43 est premier. Alors 43 ne divise pas x.
Donc : $x\wedge 43=1$.
• D'après le théorème de Fermat :
$$x^{42}\equiv 1\,[43].$$

b) • On a : $x^{41}\equiv 4\,[43]$. Donc : $x^{41}x\equiv 4x\,[43]$ c'est-à-dire : $x^{42}\equiv 4x\,[43]$. Comme $x^{42}\equiv 1\,[43]$, alors : $4x\equiv 1\,[43]$.
• On a : $11\times 4x\equiv 11\,[43]$, c'est-à-dire $44x\equiv 11\,[43]$. Comme $44\equiv 1\,[43]$, alors $44x\equiv x\,[43]$. D'où : $x\equiv 11\,[43]$

2] Soit $x\in\mathbb{Z}$.
• D'après ce qui précède : $x^{41}\equiv 4[43]\Rightarrow x\equiv 11\,[43]$.
• Supposons que $x\equiv 11\,[43]$.
Alors : $x^{41}\equiv 11^{41}\,[43]$
Comme $43\wedge 11=1$ et 43 est premier, alors d'après le théorème de Fermat :
$$11^{42}\equiv 1\,[43],$$
c'est-à-dire : $11\times 11^{41}\equiv 1\,[43]$
Donc : $44\times 11^{41}\equiv 4\,[43]$
Comme $44\equiv 1\,[43]$, alors $11^{41}\equiv 4[43]$
D'où : $x^{41}\equiv 4\,[43]$
On a prouvé que : $x\equiv 11\,[43]\Rightarrow x^{41}\equiv 4\,[43]$
• En conclusion :
$$x^{41}\equiv 4\,[43]\Leftrightarrow x\equiv 11\,[43].$$
L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{Z}$, de l'équation (F) est $\{11+43k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

C.1] a) Soit $x\in\mathbb{Z}$.
• D'après B.2], on a : $x^{41}\equiv 4\,[43]\Leftrightarrow x\equiv 11\,[43]$
• D'après le théorème de Fermat et puisque 47 est premier, alors $x^{47}\equiv x\,[47]$.
Donc : $x^{47}\equiv 10\,[47]\Leftrightarrow x\equiv 10\,[47]$.
• On en déduit que :
$$\begin{cases}x^{41}\equiv 4\,[43]\\ x^{47}\equiv 10\,[47]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 11\,[43]\\ x\equiv 10\,[47]\end{cases}$$

b) Soit $x\in\mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases}x\equiv 11\,[43]\\ x\equiv 10\,[47]\end{cases}$
Comme $527=12\times 43+11$ et $527=11\times 47+10$, alors $527\equiv 11\,[43]$ et $527\equiv 10\,[47]$.
Donc : $\begin{cases}x\equiv 527\,[43]\\ x\equiv 527\,[47]\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}43\mid x-527\\ 47\mid x-527\end{cases}$
Comme $43\wedge 47=1$, alors : $43\times 47\mid x-527$, c'est-à-dire : $2021\mid x-527$ ou encore : $x\equiv 527\,[2021]$

2]. On a montré que :
$$\begin{cases}x^{41}\equiv 4\,[43]\\ x^{47}\equiv 10\,[47]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 11\,[43]\\ x\equiv 10\,[47]\end{cases}$$
et
$$\begin{cases}x\equiv 11\,[43]\\ x\equiv 10\,[47]\end{cases}\Rightarrow x\equiv 527\,[2021]$$
• Soit $x\in\mathbb{Z}$ tel que : $x\equiv 527\,[2021]$.
Comme $527\equiv 11\,[43]$ et $527\equiv 10\,[47]$, alors $x\equiv 11\,[43]$ et $x\equiv 10\,[47]$ (car $2021=43\times 47$)
Ainsi : $x\equiv 527\,[2021]\Rightarrow\begin{cases}x\equiv 11\,[43]\\ x\equiv 10\,[47]\end{cases}$
• Conclusion :
$$\begin{cases}x^{41}\equiv 4\,[43]\\ x^{47}\equiv 10\,[47]\end{cases}\Leftrightarrow x\equiv 527\,[2021]$$
L'ensemble des solutions du système (G) est $T=\{527+2021k\mid k\in\mathbb{Z}\}$

(166) Soit a un entier supérieur ou égal à 2.
On pose : $A=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$.
Soit p un nombre premier positif impair qui divise A.
1] a) Montrer que : $a^7\equiv 1\,[p]$
En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ a^{7n}\equiv 1\,[p]$
b) Montrer que $a\wedge p=1$.
En déduire que : $(\forall m\in\mathbb{N})\ a^{(p-1)m}\equiv 1\,[p]$.
2] On suppose que 7 ne divise pas $p-1$.
a) Montrer que : $a\equiv 1\,[p]$
b) En déduire que : $p=7$.
3] Montrer que si p est un nombre premier positif impair tel que p divise A, alors : $p=7$ ou $p\equiv 1\,[7]$.

Solution
1] a) • On a : $p\mid A$. Donc : $a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1\equiv 0\,[p]$
Donc : $(a-1)(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)\equiv 0\,[p]$
c'est-à-dire $a^7-1\equiv 0\,[p]$.
D'où : $a^7\equiv 1\,[p]$

• On a : $a^7 \equiv 1[p]$. Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(a^7)^n \equiv 1[p]$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ a^{7n} \equiv 1[p]$

b/. On a : $a^7 \equiv 1[p]$. Donc p ne divise pas a^7. Comme p est premier, alors p ne divise pas a.

Donc : $p \wedge a = 1$

• D'après le théorème de Fermat :

$$a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Donc : $(\forall m \in \mathbb{N})\ (a^{p-1})^m \equiv 1[p]$.

$(\forall m \in \mathbb{N})\ a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

2] a) 7 est premier et 7 ne divise pas $p-1$; donc : $7 \wedge (p-1) = 1$.

D'après le théorème de Bézout, on peut établir qu'il existe deux entiers naturels n et m tel que : $7n - (p-1)m = 1$

Comme : $a^{7n} \equiv 1[p]$ et $a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$,

alors : $a^{7n} \equiv 1[p]$ et $a^{(p-1)m} \times a \equiv a[p]$

$a^{7n} \equiv 1[p]$ et $a^{1+(p-1)m} \equiv a[p]$

Comme $7n = 1 + (p-1)m$, alors :

$a \equiv 1[p]$

b/ On a : $(\forall \alpha \in \mathbb{N})\ a^\alpha \equiv 1[p]$

Donc : $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 \equiv 7[p]$

c'est-à-dire : $A \equiv 7[p]$

Or, par hypothèse, $A \equiv 0[p]$, alors $7 \equiv 0[p]$. Donc $p | 7$. Comme 7 et p sont premiers, alors : $p = 7$

3]. Soit p un nombre premier positif impair tel que p divise $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$. Deux cas se présentent :

1er cas : 7 divise $p-1$

Dans ce cas, on a : $p \equiv 1[7]$

2e cas : 7 ne divise pas $p-1$

D'après le résultat de 2], on a : $p = 7$

• Donc

Si p est un nombre premier positif impair qui divise $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$, alors : $p \equiv 1[7]$ ou $p = 7$

167 Un triplet d'entiers positifs $(a;b;c)$ est dit n-puissant si $a \le b \le c$ et $a \wedge b \wedge c = 1$ et $a^n + b^n + c^n$ est divisible par $a + b + c$. Par exemple, $(1;2;2)$ est 5-puissant.

1] Déterminer tous les triplets (s'il y en a) qui sont n-puissants pour tout $n \ge 1$

2] Déterminer tous les triplets (s'il y en a) qui sont 2004-puissants et 2005-puissants mais pas 2007-puissants.

D'après Olympiade du Canada

Solution

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons : $u_n = a^n + b^n + c^n$.

Soit le polynôme : $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.

On a : $P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$.

$P(a) = P(b) = P(c) = 0$. donc :

$$\begin{cases} a^3 = (a+b+c)a^2 - (ab+bc+ca)a + abc \\ b^3 = (a+b+c)b^2 - (ab+bc+ca)b + abc \\ c^3 = (a+b+c)c^2 - (ab+bc+ca)c + abc \end{cases}$$

En multipliant ces relations respectivement par a^{n-3}, b^{n-3} et c^{n-3} puis en additionnant, on obtient :

$u_n = (a+b+c)u_{n-1} - (ab+bc+ca)u_{n-2} + abc\,u_{n-3}$

pour tout $n \ge 3$.

Par conséquent si u_{n-2} et u_{n-3} sont divisibles par $u_1 = a+b+c$, alors u_n sera divisible par u_1.

Il s'ensuit que : Il n'existe aucun triplet qui soit 2004-puissant et 2005-puissant mais pas 2007-puissant. (c'est la réponse à la question 2])

• Tout triplet est 1-puissant.

• Soit $(a;b;c)$ un triplet 2-puissant et 3-puissant.

⊙ On a :

$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)(a+b+c) + 3abc$

Comme $(a;b;c)$ est 3-puissant, alors :

$a+b+c$ divise $3abc$

⊙ On a : $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

Comme $(a;b;c)$ est 2-puissant, alors :

$a+b+c$ divise $2(ab+bc+ca)$

⊙ Supposons qu'un nombre premier $p \ge 5$ divise $a+b+c$.

Alors : p divise $3abc$; donc p divise abc

Puisque $a \wedge b \wedge c = 1$, alors p divise exactement un de a, b, c. Mais alors p ne divise pas $2(ab+bc+ca)$.

⊙ Supposons que 3^2 divise $a+b+c$.

Alors 3 divise abc ; donc 3 divise exactement un de a, b, c. Mais alors 3 ne divise pas

⊙ Supposons que 2^2 divise $a+b+c$.
Alors 4 divise abc (car $4 \wedge 3 = 1$)
Puisque $a \wedge b \wedge c = 1$, alors un de a, b, c est pair ; ce qui implique qu'un seul de a, b, c est divisible par 4 et que les deux autres sont impairs. Mais alors $ab+bc+ca$ est impair ; ce qui infère que 4 ne peut diviser $2(ab+bc+ca)$.

⊙ Ainsi : $a+b+c$ est divisible ni par 4, ni par 9, ni par tout nombre premier supérieur à 3.
Puisque : $a+b+c \geq 3$, alors $a+b+c \in \{3;6\}$
En étudiant les différents cas qui se présentent, on conclut alors que :
Les seuls triplets n-puissants pour tout entier $n \geq 1$ sont $(1;1;1)$ et $(1;1;4)$
[Encore faut-il prouver par récurrence que : Si $(a;b;c)$ est 2-puissant et 3-puissant, alors $(a;b;c)$ est n-puissant pour tout $n \geq 1$.
Pour cela, on utilise la relation de récurrence :
$$u_n = (a+b+c)u_{n-1} - (ab+bc+ca)u_{n-2} + abc\, u_{n-3}$$
satisfaite pour tout entier $n \geq 3$]

Autre solution

⊙ Soit p un nombre premier. D'après le théorème de Fermat :
($a^{p-1} \equiv 1\,[p]$ si p ne divise pas a) et ($a^{p-1} \equiv 0\,[p]$ si p divise a)
Comme $a \wedge b \wedge c = 1$, alors :
$u_{p-1} \equiv 1\,[p]$ ou $u_{p-1} \equiv 2\,[p]$ ou $u_{p-1} \equiv 3\,[p]$
(On rappelle que $u_n = a^n + b^n + c^n$)

⊙ Soit p un nombre premier qui divise u_{p-1}
Alors : ($p = 2$ ou $p = 3$)
Donc si $(a;b;c)$ est n-puissant pour tout $n \geq 1$, les seuls diviseurs possibles de $a+b+c$ sont 2 et 3.
De la même façon, 4 ne divise pas $a+b+c$ et 9 ne divise pas $a+b+c$.
Par ailleurs : $\begin{cases} a^2 \equiv 0\,[4] \text{ si } p \text{ est pair} \\ a^2 \equiv 1\,[4] \text{ si } p \text{ est impair} \end{cases}$
et a, b, c ne sont pas tous pairs ;
donc : $u_2 \equiv 1\,[4]$ ou $u_2 \equiv 2\,[4]$ ou $u_2 \equiv 3\,[4]$
D'autre part : $\begin{cases} a^6 \equiv 0\,[9] \text{ si } 3 \text{ divise } a \\ a^6 \equiv 1\,[9] \text{ si } 3 \text{ ne divise pas } a \end{cases}$
et a, b, c ne sont pas tous divisibles par 3 ;
donc : $u_6 \equiv 1\,[9]$ ou $u_6 \equiv 2\,[9]$ ou $u_6 \equiv 3\,[9]$
Ainsi u_2 n'est pas divisible par 4 et u_6 n'est pas divisible par 9

D'où, si $(a;b;c)$ est n-puissant pour tout $n \geq 1$, alors $a+b+c$ est divisible ni par 4, ni par 9.
D'où $a+b+c \in \{3;6\}$
En traitant les différentes possibilités, on trouve que $(a;b;c) \in \{(1;1;1);(1;1;4)\}$

(168) Soit p un nombre premier positif impair.
Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2}\,[p^2]$$
D'après olympiade du Canada

Solution

Posons $S_p = \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1}$ et $2q = p-1$ (car $p-1$ est pair)
On a :
$$S_p = (1^{2p-1} + 2^{2p-1} + \dots + q^{2p-1}) + ((q+1)^{2p-1} + (q+2)^{2p-1} + \dots + (2q)^{2p-1})$$
Donc :
$$S_p = (1^{2p-1} + (2q)^{2p-1}) + (2^{2p-1} + (2q-1)^{2p-1}) + \dots + (q^{2p-1} + (q+1)^{2p-1})$$
$$S_p = (1^{2p-1} + (p-1)^{2p-1}) + (2^{2p-1} + (p-2)^{2p-1}) + \dots + (q^{2p-1} + (p-q)^{2p-1})$$
$$S_p = \sum_{k=1}^{q} \left(k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1}\right)$$
Par la formule du binôme de Newton, on a :
$$(p-k)^{2p-1} = p^{2p-1} - \dots - C_{2p-1}^{2} p^2 k^{2p-3} + C_{2p-1}^{1} p k^{2p-2} - k^{2p-1}$$
Donc :
$$k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} \equiv k^{2p-1} + C_{2p-1}^{1} p k^{2p-2} - k^{2p-1}\,[p^2]$$
Par suite
$$k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} \equiv (2p-1)p k^{2p-2}\,[p^2]$$
Par ailleurs, pour tout $k \in \{1;2;\dots;p-1\}$, $k \wedge p = 1$ et par suite, par le théorème de Fermat : Pour tout k tel que $1 \leq k < p$, on a :
$$k^{p-1} \equiv 1\,[p]$$
Donc :
$$(k^{p-1})^2 \equiv 1\,[p] \quad (1 \leq k < p)$$
$$k^{2p-2} \equiv 1\,[p]$$
et $(2p-1)k^{2p-2} \equiv 2p-1 \equiv -1\,[p]$
On peut donc écrire :
$$(2p-1)k^{2p-2} = mp - 1, \text{ où } m \in \mathbb{N}$$
Donc : $(2p-1)p k^{2p-2} = mp^2 - p$
et par suite $(2p-1)p k^{2p-2} \equiv -p\,[p^2]$
On en déduit :
$$S_p \equiv \sum_{k=1}^{q} (-p) \equiv -pq \equiv p^2 - pq \equiv \frac{p(p+1)}{2}\,[p^2]$$
D'où :
$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2}\,[p^2] \quad (p \text{ premier impair})$$